CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

REPRESENTER

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ GRECQUE

La quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection d'un angle.

Les géomètres grecs recherchent des constructions géométriques par intersections de droites et de cercles ou, si l'on veut, des constructions à la règle et au compas. Pour cela, les grecs refusaient le recours à d'autres outils, à l'utilisation de courbes, $\cdots$

Pourquoi se limiter à la règle et le compas ? selon Proclus « *Le cercle est la première, la plus simple et la plus parfaite des figures [...]. Il possède sa supériorité sur les figures établies dans le plan par sa similitude, son identité, et correspond au fini, à l'unité et, en général, à un meilleur arrangement.* »

On retrouve cette importance donnée aux cercles et aux droites dans les *Eléments d'Euclide* puisque ses deux premiers axiomes énoncent la possibilité de *tracer une ligne droite* d'un point à un autre, et celle de *tracer un cercle* de centre et de rayon donnés. D'autre part, ses propositions ne portent que sur des figures construites à la règle et au compas.

Quelques solutions avec d'autres outils proposées par des savants qui se sont intéressés aux problèmes.

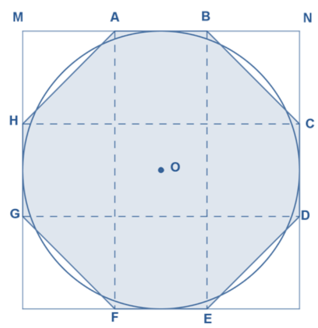
La quadrature du cercle :

C'est à dire construire un carré dont l'aire est celle d'un disque donné.

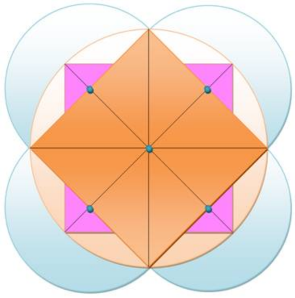
Ce problème revient à calculer π. **Anaxagore de Clazomènes**, (500-428 av. J.C) est le premier scientifique grec à s'intéresser au problème de la quadrature.

Dans le **papyrus égyptien dit de Rhind**, écrit par le scribe Ahmés vers 1650 avant J.-C., on trouve la règle suivante : pour « *construire un carré équivalent à un cercle $\cdots$ retirer au diamètre 1/9 et construire le carré sur ce qui reste* ». L'aire du disque de diamètre 1 est approximé par l'aire de l'octogone ABCDEFGH. Son aire, égale à celle de 7 carrés vaut $7/9$, soit **3,16**. On remarque que $7/9 = 63/81$soit approximativement $64/81$. Soit un carré de $8/9$ de côté.

Comme les grecs restaient persuadés que π est rationnel, la quadrature du cercle restait possible ; ils ont cherché à améliorer ces calculs.

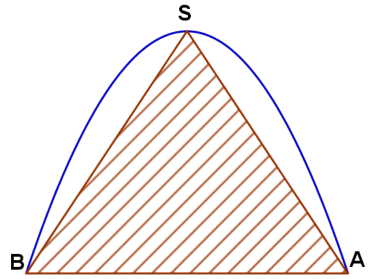


Hippocrate de Chios avait réussi la quadrature des lunules (croissant de lune délimité par deux cercles non concentriques de rayons différents). Il a montré que l'aire des quatre lunules (en bleu) est égale à celle du carré (orange).



Ayant réussi cette quadrature, Hippocrate pensait que la quadrature du cercle serait possible.

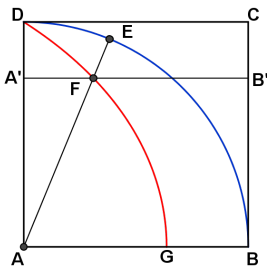
Archimède (287-212 av. J.-C.) avait lui réussi la quadrature de la parabole c.a.d. le calcul de l'aire délimitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend. C'est un des premiers calculs de surface, réalisé par Archimède : Proposition I du livre de la méthode d'Archimède :



L'aire de la portion de parabole ASB est égale à 4/3 de l'aire du triangle ASB.
Ayant réussi cette quadrature, Archimède pensait que la quadrature du cercle serait possible.

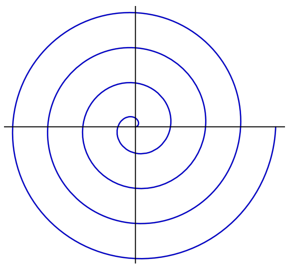
La quadratrice de Dinostrate (IVe siècle av.J.C.) : **Hippias d'Élias** (fin du Ve siècle), cherchant à résoudre le problème de la trisection de l'angle, inventa une courbe appelée plutôt la quadratrice de Dinostrate, car ce dernier l'utilisa pour résoudre la quadrature du cercle.

Définition d'une quadratrice : *Le point B' se déplace uniformément sur le segment [BC], son ordonnée est y avec* $0 \leq y \leq 1$. *Le point E se déplace uniformément sur le quart de cercle BD, la mesure de l'angle* $\widehat{BAE}$ *est* $\theta = \frac{\pi}{2}y$ *radians. La droite horizontale (A'B') coupe la droite (AE) en F.*
La courbe décrite par F est la quadratrice de Dionostrate.
Dans le triangle $AA'F$ rectangle en A', notons $\theta = \widehat{AFA'} = \widehat{BAE}$. L'équation polaire de la quadratrice est $\rho = 2\theta/\pi sin(\theta)$.



Le point G d'intersection de la quadratrice avec $[AB]$ a pour abscisse $\mathbf{2}/\pi$. En notation moderne, on dirait que $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\pi sin\theta} = \frac{2}{\pi}$

La spirale Archimède(287-212 av. J.-C.) améliorée par Eutocios d'Ascalon (480-540)



Définition de la spirale : *C'est la courbe décrite par un point en déplacement uniforme sur une droite elle-même en rotation uniforme autour d'un point.*

La tangente au point M rencontre la droite (Oy) en P. On obtient alors $\pi = \mathbf{OP}/\mathbf{OM}$

Duplication du cube :

Dit problème de Délos posé par les sophistes grecs au VIe siècle avant J.-C. : les habitants de Delos victimes d'une épidémie de peste, firent appel à l'oracle de Delphes qui leur dit qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes allèrent trouver Platon pour savoir comment faire. Ce dernier leur répondit que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

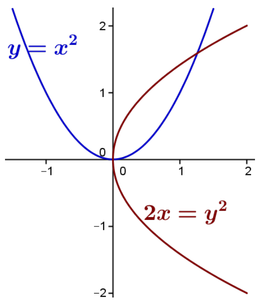
Le problème revient à construire à la règle et au compas : $\sqrt[3]{2}$

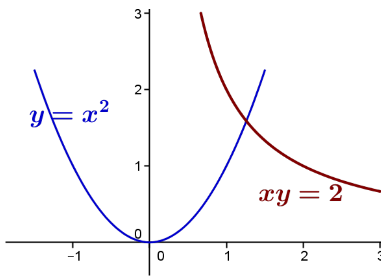
Là encore, ce problème est impossible, mais les mathématiciens grecs ont proposé des solutions utilisant d'autres outils.

Hippocrate de Chios découvrit qu'il suffisait de trouver deux moyennes proportionnelles (x et y) entre a (la longueur du côté) et deux fois cette longueur pour résoudre le problème. En effet, si on a $a/x = x/y = y/2a$; on a alors $x^3 = 2a^3$. Mais comment déterminer ces moyennes proportionnelles ?

Les coniques de Menechme : on remarque que $a/x = x/y = y/2a$ est équivalent à $x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$ mais aussi à $x^2 = ay$ et $xy = 2a^2$

La solution est obtenue par l'intersection de deux paraboles ou d'une parabole et d'une hyperbole.

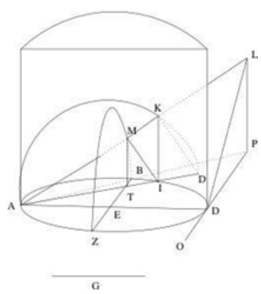


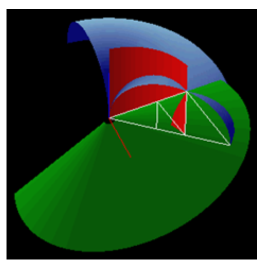


Archytas de Tarente(IVe siècle av. J.-C.) proposa une solution en dimension 3, intersection d'un cône droit, d'un cylindre et d'un tore.

En langage moderne, cela revient à résoudre le système d'équations suivant :

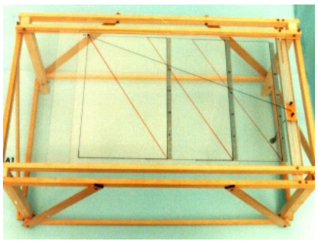
$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= ax \quad (\textit{cylindre}) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= ax^2 + y^2 \quad (\textit{tore}) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2x^2/b^2 \quad (\textit{cône}) \end{cases}$$

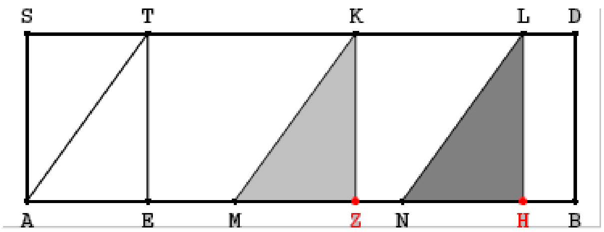


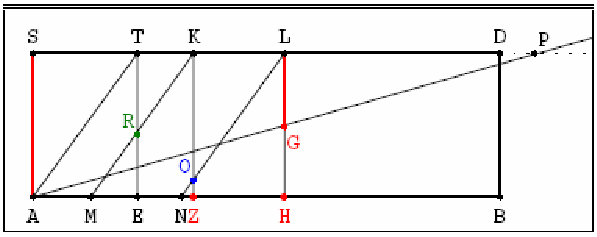


Le mésolabe d'Eratosthène :

Eratosthène de Cyrène (IIIe siècle av. J.C.) recherche de moyennes proportionnelles à l'aide d'un instrument utilisant des triangles juxtaposés mobiles. Cet outil est nommé le **mésolabe**.





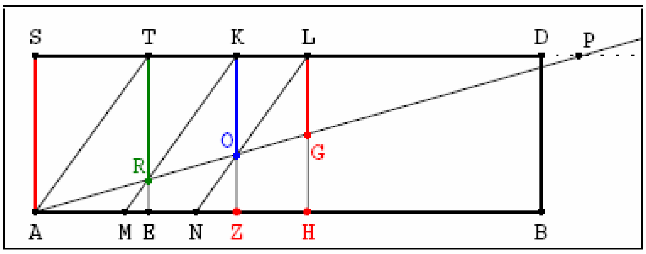


Le mésolabe à l'état initial :

Le triangle TEA est fixe et les deux autres KZM et LHN sont mobiles, ils glissent le long de AB Le point G est le milieu de LH

- O est l'intersection des droites KZ et LN
- R est l'intersection des droites KM et TE

Il s'agit maintenant de trouver les deux moyennes proportionnelles entre les droites SA et LG. Pour ce faire, il s'agit de faire glisser les triangles KZM et LHN sous le triangle TAE de telle sorte que les points A, R, O et G soient alignés.



En utilisant le théorème de Thalès, on peut montrer qu'on obtient les rapports suivants : $LG/KO = KO/TR = TR \ / \ SA$. Ainsi, RT et KO sont les deux moyennes proportionnelles recherchées. Si $LG = a$ et $SA = 2a$ alors $KO = \sqrt[3]{2}$

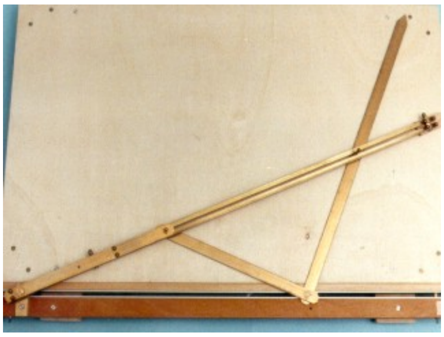
Trisection de l'angle :

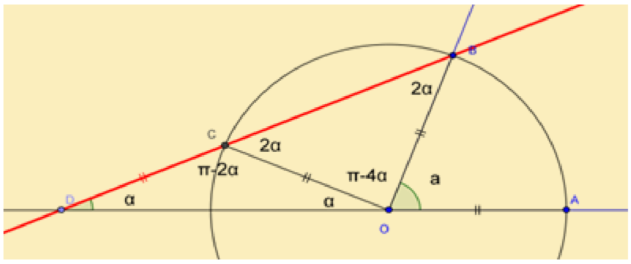
Partager un angle θ quelconque en trois angles égaux.

Pour cela, il faut trouver t tel que $3t = \theta$. On a à résoudre : $cos\theta = 4cos^3t - 3cost$. Donc $cost = x$ est solution de l'équation $4x^3 - 3x = cos\theta$. La trisection revient à savoir si les solutions de cette équation sont constructibles.

Méthode d'Archimède avec un compas et une règle graduée.

On dispose d'une règle portant deux graduations C et D ; soit r la mesure de [CD]



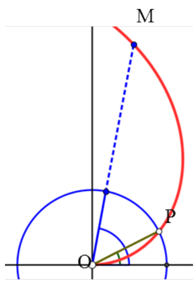


Soit a la mesure de l'angle à trisecter, de sommet O. On trace un cercle de centre O et de rayon r. Le cercle coupe en A et B les côtés de cet angle. On dispose la règle de façon à ce qu'elle passe par B, que l'une des graduations C de la règle soit sur le demi cercle, et l'autre graduation D soit sur le prolongement de (OA).

On montre facilement que l'angle $\widehat{ODC}$ a une mesure qui vaut le tiers de l'angle a.

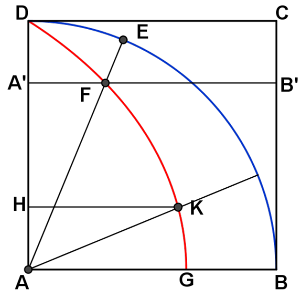
La spirale d'Archimède : (voir définition page précédente)

Il suffit de repérer le point M de la spirale associé à l'angle θ, de construire un cercle de centre O et de rayon OM/3. Ce cercle coupe la spirale en un point P associé à l'angle $\theta/3$.

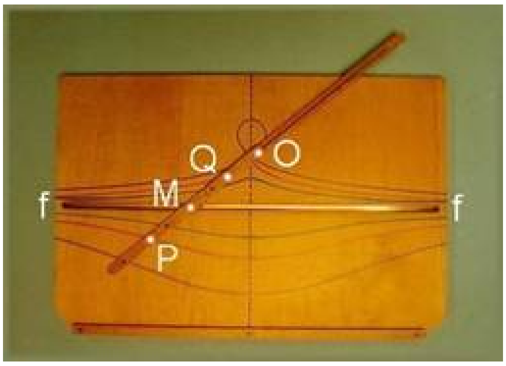


La quadratrice d'Hippias(Ve siècle av. J.C.) (voir définition précédente)

Méthode : Soit A le sommet de l'angle à trisecter. On se place dans le repère orthonormé (A, B, D). On trace le quart de cercle $\overset{\frown}{BD}$ de centre A. L'angle à trisecter coupe l'arc $\overset{\frown}{BD}$ en E et la portion de quadratrice (en rouge sur la figure) en F.
Soit A' et B' les intersections de la parallèle à AB passant par F, avec AD et BC. Soit H le point de l'axe des ordonnées tel que $AH = 1/3AA'$.
Soit K le point de la quadratrice se projetant en H sur AD.
$\widehat{BAK}$ est l'angle recherché. Par définition de la quadratrice, sa mesure vaut $1/3$ de celle de $\widehat{BAE}$.

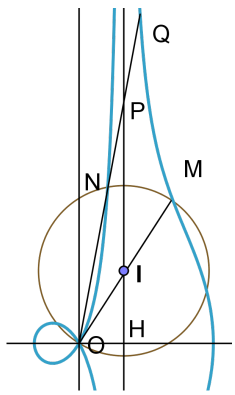


La conchoïde de Nicomède (IIe siècle avant J.-C.), il fut le premier à réaliser une construction mécanique d'une courbe plane autre que le cercle.

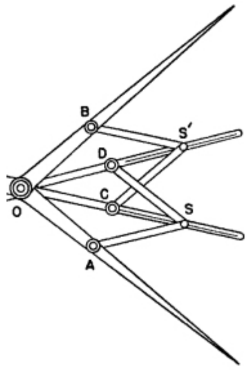


Définition de la conchoïde : Étant donné une directrice (d), un pôle O non situé sur (d), et un module b, à partir d'un point P de la directrice, on construit les deux points N et Q de la droite (OP) situés à une distance b de P tels que : $PN = PQ = b$.
La conchoïde est le lieu géométrique des points N et Q, lorsque P parcourt (d).
C'est la courbe d'équation polaire $\rho = a/cos\theta + b$, où a est la distance du pôle à la directrice $(a = OH)$.

Démonstration : Soit le triangle OHI rectangle en H, tel que l'angle φ à trisecter soit $\widehat{OIH}$, et la conchoïde de directrice (IH), de pôle O et de module OI. Avec $a = OH$, la conchoïde a pour équation $\rho = a/cos\theta + cos\varphi$. L'intersection de la conchoïde avec le cercle de centre I, passant par O, permet de déterminer les deux points M et N, puis les points P et Q. Grâce aux propriétés de la conchoïde, on montre que l'angle $(\widehat{NIP})$ trisecte l'angle $(\widehat{OIH})$.



De nos jours, à travers le monde, on s'interesse toujours au problème



Le compas trisecteur de Laisant (1875).

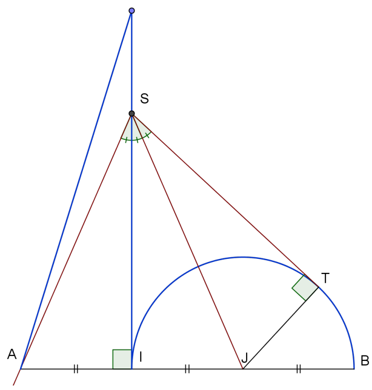
Si l'angle à trisecter est $\widehat{AOB}$, alors $\widehat{AOS}$ est l'angle recherché.

Démonstration : *OS et OS' étant les diagonales des losanges $ODSA$ et $OCS'B$, on en déduit que OS et OS' partagent l'angle $\widehat{AOB}$ en trois parties égales.*

Le Tomahawk : d'inventeur inconnu, env. 1835.

Description : le tomahawk est constitué d'un triangle rectangle et d'un demi disque (voir l'image ci-dessous). La longueur du petit côté (AI) de l'angle droit est égal au rayon du disque. Le grand côté de l'angle droit est tangent au cercle (bord extérieur du disque).

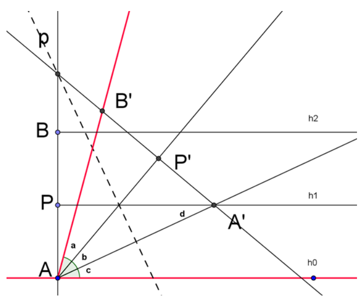
Méthode : Positionner le sommet S de l'angle à trisecter sur le grand côté de l'angle droit. Ajuster de façon à ce qu'un côté de l'angle passe par A et que l'autre côté soit tangent au cercle. Soit T le point de tangence.



Démonstration : *$AI = IJ = JB$ et l'angle $\widehat{AIS}$ est droit. Dans le triangle ASJ (SI) est hauteur et médiane, le triangle est donc isocèle et (SI) est aussi bissectrice de l'angle ASJ. Les deux segments [IJ] et [JT] sont perpendiculaires aux côtés [SI) et [ST) de l'angle IST et de même mesure, la droite (SJ) est donc bissectrice de l'angle IST et trisectrice de AST*

Construction par pliage de papier (Abe, 1980)

Soit h_0 et h les droites déterminant l'angle a à découper en trois. Par pliage, on détermine deux bandes horizontales de même largeur en bas de la feuille, délimités par h_1 et h_2. h_1 et h_2 coupent la perpendiculaire en A à h_0 , resp. en P et B.
On plie la feuille le long d'un pli p de sorte que le point A aille sur la droite h_1 en un point A', en même temps que le point B ira sur la droite h en un point B'. La droite t passant par A et A' est la trisectrice de l'angle a formé par h_0 et h.



Démonstration : *Soit p la droite de pliage. On appelle P' le symétrique de P par rapport à p. Par symétrie par rapport à p, on montre successivement que AP' est la médiatrice de $A'B'$;*

de plus comme $A'AB$ est isocèle ($A'P$ est médiatrice et hauteur), on déduit par symétrie que $AA'B'$ est isocèle. Donc AP' est la bissectrice de $A'AB'$. Donc $a = b$. D'autre part, les triangles $A'AP$ et $AA'P'$ sont égaux, donc $b = d$. Or $c = d$ (angles alternes-internes). D'où $a = b = c$.

Références

[1] Evelyne Barbin. Cours de l'Université de Nantes, Master 2 d'Histoire des Sciences et des Techniques. *Les grands problèmes de la géométrie grecque et l'invention des courbes*

[2] Patrice Debart. http ://debart.pagesperso-orange.fr/histoire/grands_problemes.html

[3] Thérèse Eveilleau. http ://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr

[4] Dominique Tournes. *Duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle : rien d'impossible !* Stage "Grands problèmes" 11 avril 2006