HISTOIRES DE SPHERES

REPERER

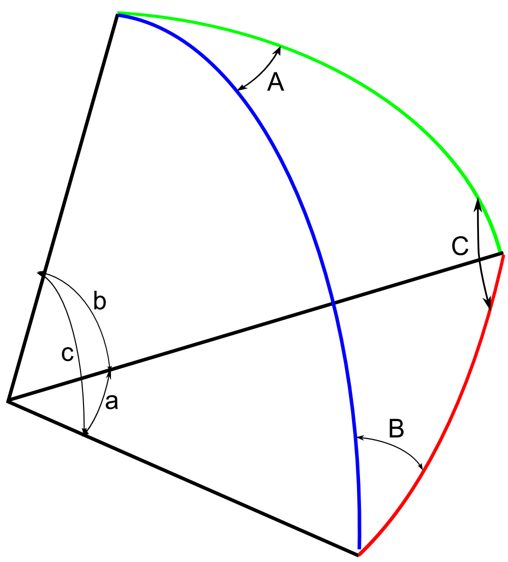
Θαλῆς   Μενέλαος   Πτολεμαῖου

La trigonométrie sphérique s'intéresse aux calculs des triangles tracés sur une sphère, ceux dont les côtés sont des *grands cercles* de la sphère.

Pour simplifier on suppose que la sphère est de rayon 1 et on note a, b, c les côtés, A, B, C les angles aux sommets.

Formules pour les triangles quelconques

Il y a beaucoup de formules qui relient les côtés et les angles des triangles sphériques mais certaines sont plus fondamentales que les autres. Pour les triangles quelconques on a trois formules dites fondamentales mais en fait les formules (2) et (3) se déduisent de (1), ou du moins de (1) et des deux formules obtenues par permutation circulaire de a, b, c et A, B, C.

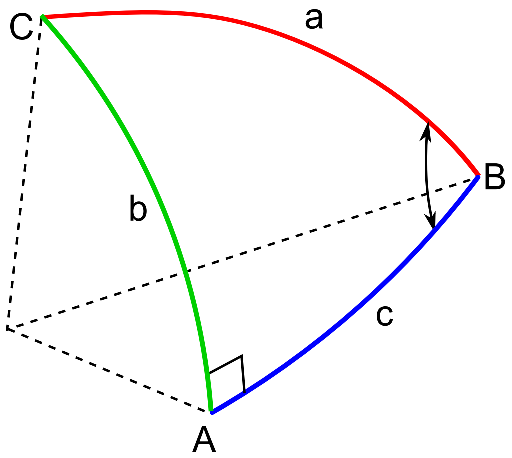


$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{1}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} \tag{2}$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \tag{3}$$

Formules pour les triangles rectangles



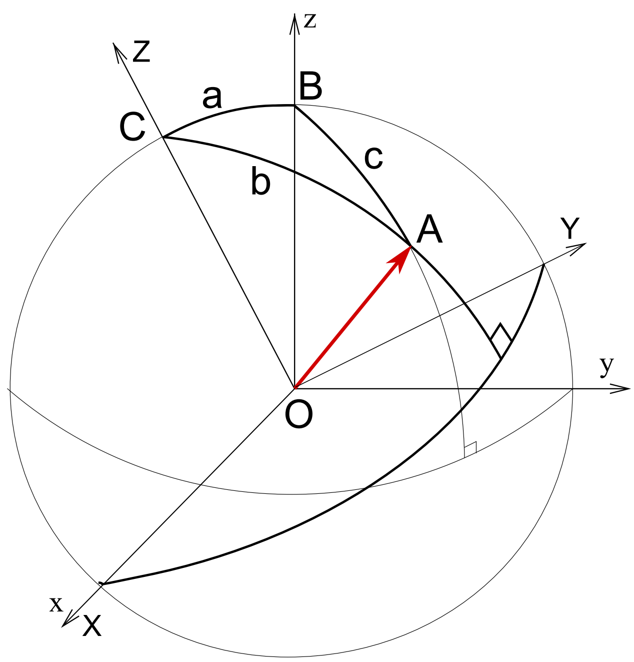
Avec $\sin(A) = 1$ et $\cos(A) = 0$ les formules (1), (2) et (3) se simplifient et deviennent

$$\sin b = \sin a \sin B \quad (4)$$
$$\sin c \cos b = \sin a \cos B \quad (5)$$
$$\cos a = \cos b \cos c \quad (6)$$

Les démonstrations au cours de l'histoire

Depuis le XXe siècle

On utilise des produits scalaires ou des matrices de rotation.



- **Par changement de repère**
  On passe du repère Oxyz au repère OXYZ par la rotation d'axe Ox et d'angle a. Le vecteur OA est calculé successivement dans les repères Oxyz et OXYZ.
- **Par produit scalaire**
  B et C sont repérés par leurs coordonnées dans le repère dont OA est le 3ème axe. Le calcul de $OB \cdot OC$ donne alors directement la formule (1).

Au XIXe siècle

On utilise la formule d'Al-kashi qui généralise le théorème de Pythagore : elle donne la longueur du côté d'un triangle plan en fonction des deux autres côtés et de l'angle opposé.

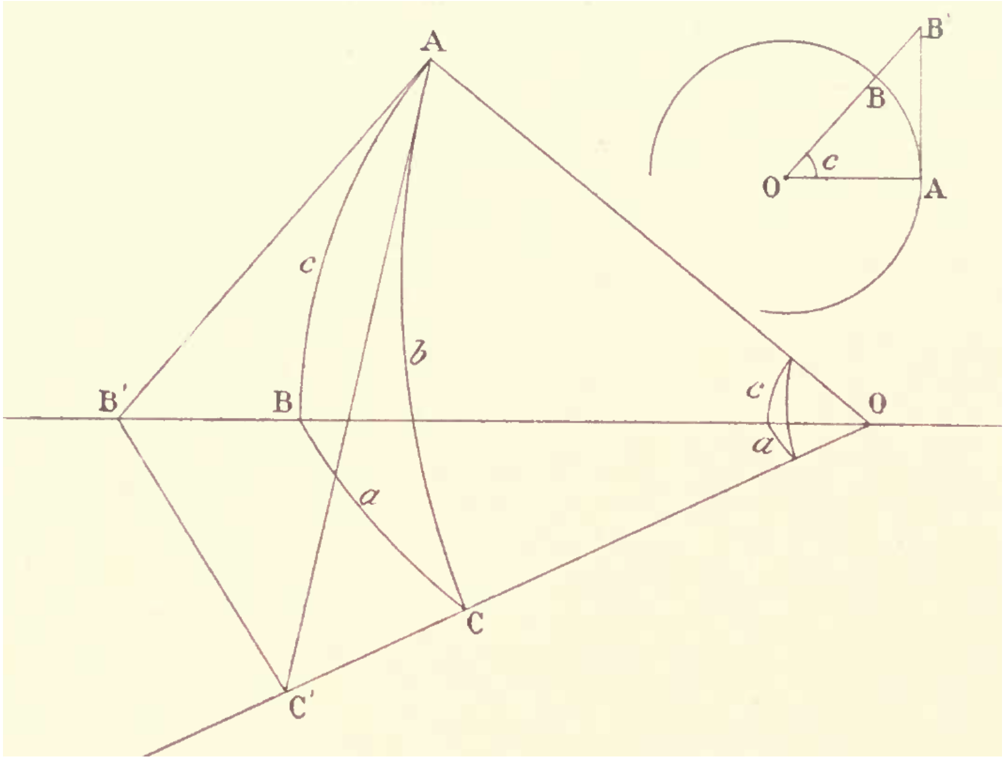
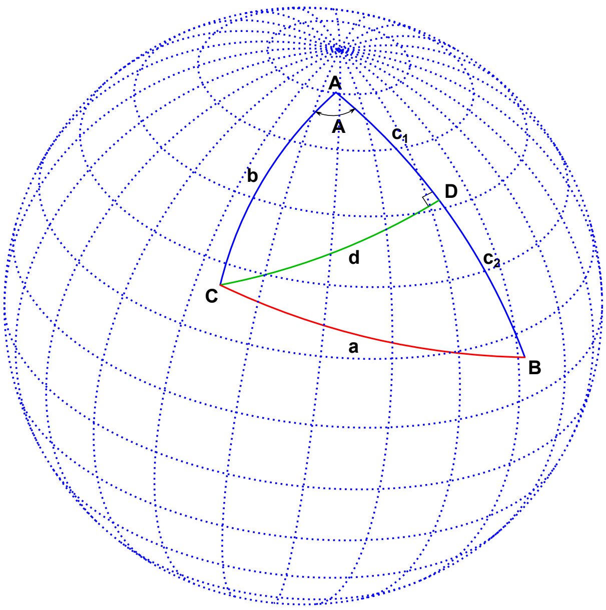


Illustration du cours de Mathématiques générales Henri Bouasse 1920

On calcule $B'C'$ dans les triangles $AB'C'$ et $OB'C'$. On en déduit la relation entre BC, AB, AC et l'angle $\widehat{B'AC'}$.

Au XVIIe et XVIIIe

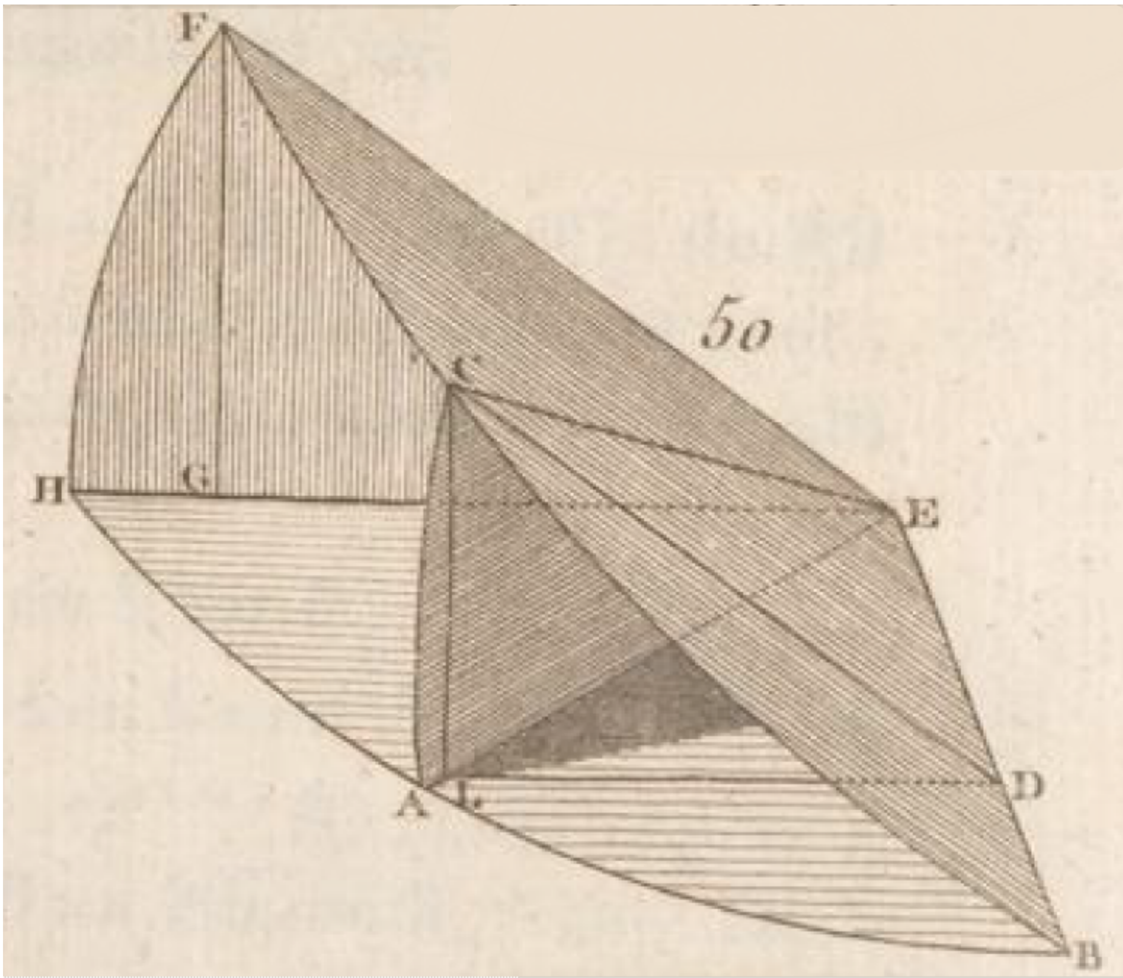
Les triangles rectangles sont utilisés pour la plupart des calculs faits par les navigateurs et les astronomes



On utilise les formules des triangles rectangles dans ACD et CDB pour résoudre le triangle sphérique quelconque ABC :
On calcule successivement
- d par $\sin d = \sin b \sin A$,
- c_1 par $\cos d \sin c_1 = \sin b \cos A$,
- $c_2 = c - c_1$
- a par $\cos a = \cos d \cos c_2$

Au XVIIIe siècle

On utilise des triangles semblables associées aux relations de la trigonométrie plane pour obtenir les formules de triangles rectangles.



Cagnoli, Traité de trigonométrie, 1786

Les triangles CLD et FGE sont semblables. La définition du sinus dans ECL, CLD et FGE donne

$$\sin AC = \sin BC \sin B$$

La définition du sinus et du cosinus dans ECD, ECL, ELD et FGE donne

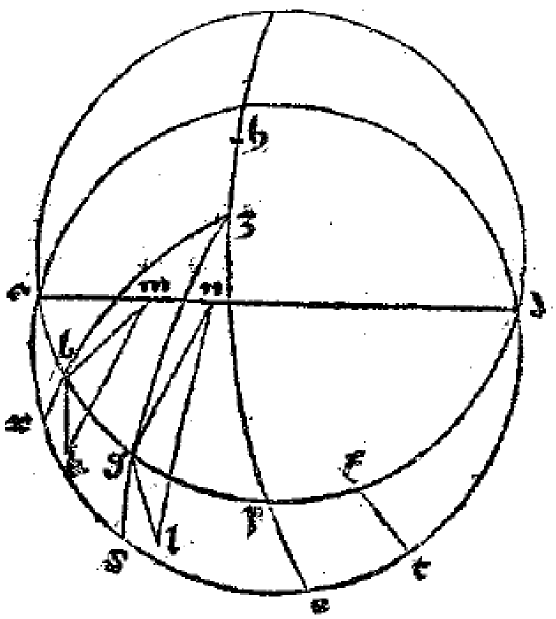
$$\sin AB \cos AC = \sin BC \cos B$$

Au XVIe siècle

Dans le traité de trigonométrie de Regiomontanus on a déjà la démonstration basée sur les triangles semblables, mais la figure y est beaucoup moins explicite.

& punctum ſectionis ad ſinum arcus producti ex illo puncto.

Non abſterreat obſecro te uerboſa præſens propoſitio, & primo aſpectu intricata; rebus enim Mathematicis uix ſatis lucidum, ne dixerim uenuſtū, accomodabis ſermonem; fructū profecto dulciſſimū hac arbore ꝗuis rigida decerpes, quem ubi perſenſeris, totū fermè præſentē librum intelliges. Sint igit̃ duo circuli magni in ſphæra ad ſe inuicem inclinati a b g d & a e d, quoꝝ circumferentiæ ſecent ſe in punctis a & d, ſignentq́ duo puncta b g in circumferentia circuli a b g d, à quibus deſcendant duo arcus ꝑpendiculares b r, g s ad circumferentiam circuli a e d. Dico ꝙ proportio ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt ut ſinus arcus a g ad ſinum arcus g s. A punctis enim b & g binæ perpendiculares rectæ demittãtur, unæ quidem ad ſectiōem communem circuloꝝ ſcilicet lineam a d, quæ ſint b m, g n, alteræ uero ad ſuperficiem circuli a e d, quæ ſint b k & g l ductis lineis k m & l n



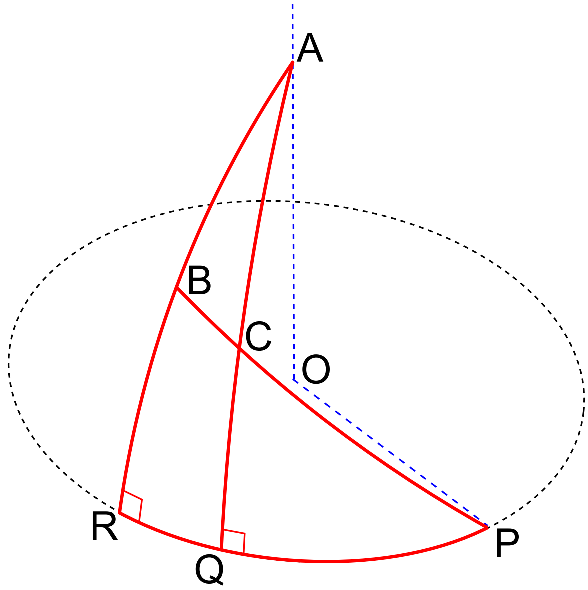
quoniam itaq́ duæ lineæ m b, b k angulariter coniunctæ, æquediſtant duabus n g, g l angulariter coniunctis, b m enim æquediſtat lineæ g n per primi, b k autem ipſi g l per undecimi, erit angulus m b k æqualis angulo n g l, uterq́ autem anguloꝝ b k m & g l n rectus eſt ex diffinitione lineæ perpendicularis ad ſuperficiem, quare per 32 primi duo trianguli m b k & n g l ſunt æquianguli, & ideo per 4. ſexti permutatim arguendo proportio m b ad b k eſt, ut proportio n g ad g l. eſt autem m b ſinus rectus arcus a b per tertij & diffinitionem, n g uero ſinus arcus a g, item b k ſinus arcus b r, g l autem ſinus arcus g s. proportio igitur ſinus arcus

ce qui donne, pour la 1ère phrase de cette page :

"...Je prie pour que ce théorème verbeux et compliqué ne vous effraye pas à première vue, car en mathématiques vous rendrez rarement le texte assez clair. En vérité, bien qu'austère, vous cueillerez le fruit le plus doux de cet arbre : et quand vous l'aurez dégusté, vous comprendrez presque tout ce livre...."

Au Moyen-Age arabe

C'est la règle dite **des quatre quantités** qui est la plus utilisée, simplifiant en particulier les calculs astronomiques.



$$\frac{\sin QC}{\sin RB} = \frac{\sin PC}{\sin PB}$$

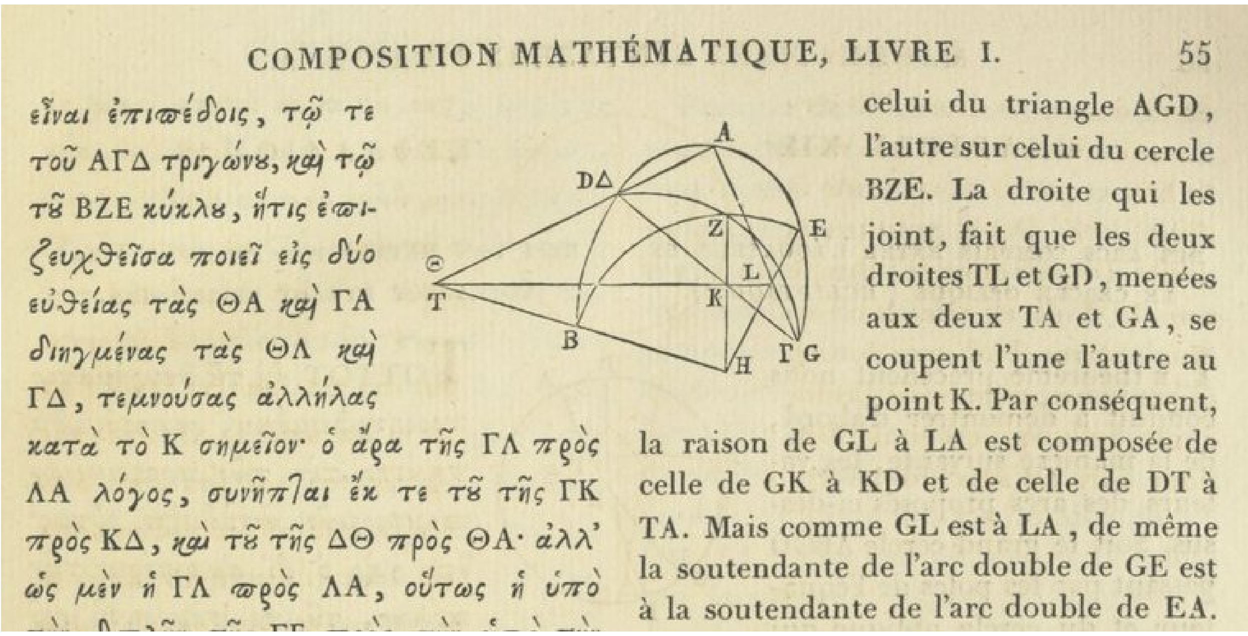
Elle est obtenue par application du théorème de Ménélaus dans le triangle ABC coupé par PQR

$$\frac{\sin PB}{\sin PC}\,\frac{\sin QC}{\sin QA}\,\frac{\sin RA}{\sin RB} = 1$$

Au IIe siècle

Ptolémée fait du théorème de Ménélaus la base de ses calculs astronomiques.

Μαθηματικη Συνταξισ



COMPOSITION MATHÉMATIQUE, LIVRE I. 55

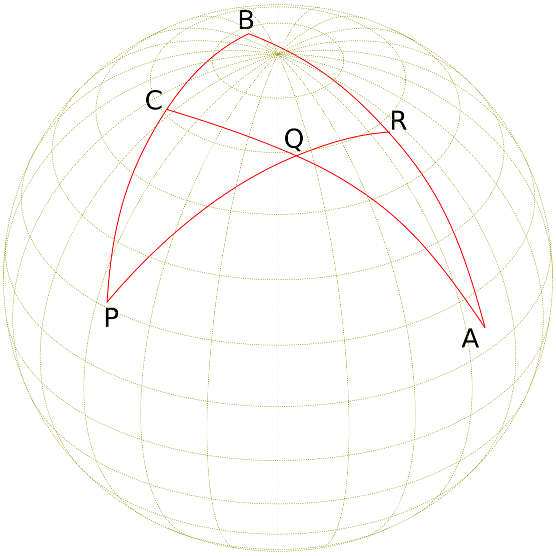
εἶναι ἐπιπέδοις, τῷ τε τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῷ τοῦ ΒΖΕ κύκλου, ἥτις ἐπιζευχθεῖσα ποιεῖ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΘΑ καὶ ΓΑ διηγμένας τὰς ΘΛ καὶ ΓΔ, τεμνούσας ἀλλήλας κατὰ τὸ Κ σημεῖον· ὁ ἄρα τῆς ΓΛ πρὸς ΛΑ λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΚ πρὸς ΚΔ, καὶ τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΑ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΛ πρὸς ΛΑ, οὕτως ἡ ὑπὸ

celui du triangle AGD, l'autre sur celui du cercle BZE. La droite qui les joint, fait que les deux droites TL et GD, menées aux deux TA et GA, se coupent l'une l'autre au point K. Par conséquent, la raison de GL à LA est composée de celle de GK à KD et de celle de DT à TA. Mais comme GL est à LA, de même la soutendante de l'arc double de GE est à la soutendante de l'arc double de EA.

Traduction de l'Almageste de Ptolémée.
(N.Halma, notes de J-B.Delambre, 1813)

Les démonstrations classiques

Thèorème de Ménélaus sphérique



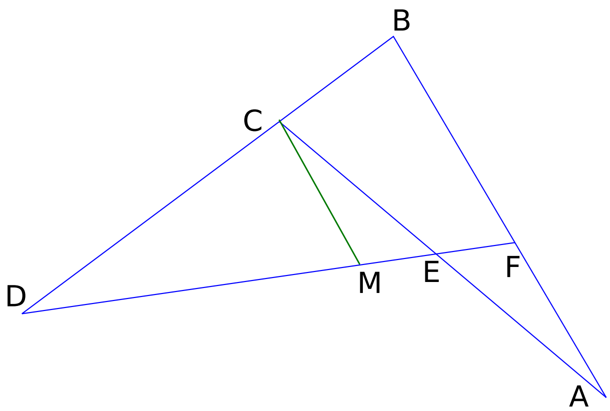
Ecriture symétrique

$$\frac{\sin PB}{\sin PC} \times \frac{\sin QC}{\sin QA} \times \frac{\sin RA}{\sin RB} = 1$$

Ecriture antique

$$\frac{\sin RA}{\sin RB} = \frac{\sin PC}{\sin PB} \times \frac{\sin QA}{\sin QC}$$

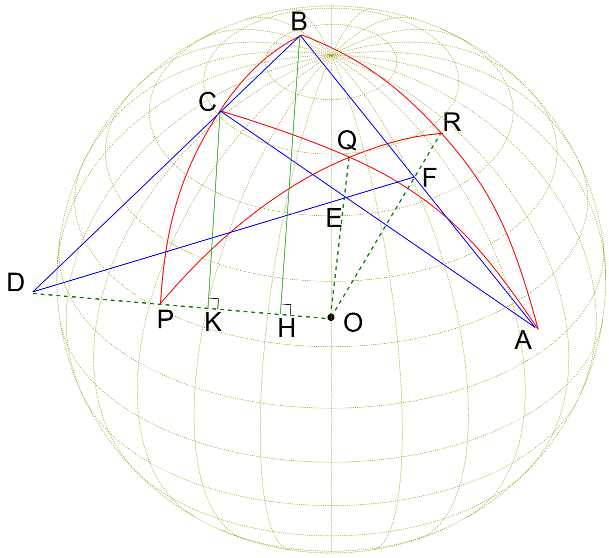
Thèorème de Ménélaus plan



$$\frac{DB}{DC}\,\frac{EC}{EA}\,\frac{FA}{FB} = 1$$

La démonstration n'utilise que le théorème de Thalès avec les triangles semblables :
DCM et DBF, ECM et EAF.

Thèorème de Ménélaus : démonstration antique



On utilise les triangles semblables DCK et DBH

$$\frac{DC}{DB} = \frac{CK}{BH} = \frac{\sin PC}{\sin PB}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Ménélaus plan à ABC coupé par DEF

Les traductions des "Sphériques"

Le théorème de Ménélaus nous est parvenu par sa version de Ptolémée mais aussi par l'intermédiaire de diverses traductions de l'ouvrage "Les sphériques". Elles sont résumées dans le tableau suivant où l'on voit le rôle très important joué par les traducteurs arabes du Moyen-Age.