EMERGENCE

L'ALGÈBRE ARABE

On appelle algèbre arabe l'algèbre qui s'écrit en langue arabe, quelle que soit la langue maternelle ou la religion (musulmans, juifs, chrétiens, ...) des divers savants qui l'utilise. A partir du IXe siècle, d'al Andalus aux confins de la Chine et de l'Inde, en passant par le Maghreb, le Moyen-Orient, l'Iran, l'arabe est **la langue des mathématiques** et de la philosophie et est, avec l'Islam, l'un des facteurs d'unité entre ces pays géographiquement très éloignés et regroupant des savants très cosmopolites. Ils se veulent et sont, les héritiers de la science et de la philosophie grecques qu'ils transmettront avec quelques apports d'Inde.

C'est l'Orient musulman, à partir du IXe siècle, qui va voir naître les prémices de l'algèbre ; c'est l'Occident musulman qui, à partir du XIIe siècle, va jouer un rôle central dans la diffusion des ouvrages d'algèbre vers l'Europe.

Quel contexte a favorisé l'émergence de l'algèbre ?

- La **Maison de la Sagesse**, fondée par Al-Ma'mūn à Bagdad en 832 ; c'est un lieu où les savants vont pouvoir travailler et se rencontrer comme le font actuellement nos chercheurs dans les grands instituts (CNRS, ...). A l'origine, c'est une bibliothèque pour la copie de livres et de manuscrits grecs achetés ou récupérés comme butin dans les territoires byzantins ; on y fera ensuite des traductions des œuvres grecques : l'Almageste de Ptolémée, les Eléments d'Euclide, les coniques d'Apollonius, les œuvres d'Archimède.
- **Le patrimoine intellectuel des territoires conquis** : les savants du monde arabo-musulman en bénéficient. Par exemple, à Alexandrie des bibliothèques privées renferment une partie du patrimoine grec ; à Nisibe (Edesse, Antioche et Harran on connait l'astrolabe et le calcul indien (vers 667) ; Gundishapour en Perse est en contact avec l'Inde.
- **L'unité linguistique** : l'arabe est la langue des mathématiques et de la philosophie comme le sera le latin au Moyen Age.
- **L'industrie du papier** : cette nouvelle technologie venue de Chine se développe à Samarkand puis à Bagdad.

L'algèbre en Orient, du début du IXe s. au XIVe s. : l'émergence des concepts

L'algèbre dès ses débuts est une science qui combine théorie et application. Les opérations algébriques se libèrent peu à peu de la représentation géométrique ; ce qui sera la spécificité de l'algèbre.

L'algèbre se développe sans symbolisme, il s'agit d'une mathématique entièrement rhétorique : tout est écrit en toutes lettres. De plus, les "coefficients" sont tous positifs et on ne recherche que les solutions positives. Par exemple : "*Un cube plus une racine plus un nombre sont égaux à un carré*" pour l'équation du 3ème degré qu'on note actuellement : $x^3 + bx + c = ax^2$ avec $a, b, c > 0$

- **Al Khwārizmī** (783-850)

L'ouvrage qui fonde l'algèbre arabe est le traité d'al **Khwārizmī**[1] (*Mukhtasar fī hisīb al-jabr wa al-muqābala*) [*Abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison*](entre 813 et 833). C'est la première apparition du mot *al jabr* , le nom d'al Khwārizmī lui sera déformé en "algorithme". Dans cet abrégé, on trouve des algorithmes, des preuves, et des domaines d'application.

Il présente la théorie des équations du second degré, ainsi que le calcul algébrique sur les polynômes associés (de degré inférieur ou égal à 2) sans formuler la notion de polynôme en général. Avec comme vocabulaire de base, les trois termes : *les racines* (x^2), *les biens* (x) et *les nombres* (a), il énonce six équations canoniques qui expriment les différentes façons d'écrire un trinome du second degré sans coefficients négatifs, avec leurs algorithmes de résolution décrit sur des exemples[2].

Certains des procédés de résolution et des méthodes de justification qu'Al Khwārizmī (IXe s.) utilise dans son *Abrégé* étaient connues, par exemple, dans *Le livre des neufs chapitres* (Chine, 1er s.)[3], connues dans des œuvres grecques (les *Métriques* de Héron et les *Arithmétiques* de Diophante) mais ces œuvres ne seront traduites en arabe qu'au début de Xe s, enfin on en retrouve sur des tablettes babyloniennes, mais au IXe s. les hommes de science connaissaient-ils l'existence de ces tablettes ?

- **Abū Kāmil** (850-930), contemporain de la traduction arabe des Arithmétiques de Diophante dans lequel on voit apparaître pour la première fois la notion d'indéterminée (d'inconnue),(voir le panneau "'Diophante, père de l'algèbre ?) Abū Kāmil poursuivra et systématisera l'étude de l'analyse indéterminée dans *Le Livre complet en algèbre*. il la dotera d'une terminologie propre et en donnera un exposé systématique dont l'objet est de résoudre par l'algèbre des problèmes traités jusqu'alors par les arithméticiens. Il aura une influence énorme sur ses successeurs jusqu'à Fibonacci (Renaissance italienne).

- **Al Karajī** (mort en 1029) : dans le *Fakhri* en algèbre et *Le livre merveilleux* en calcul il expose les premiers éléments d'une théorie des polynômes ; il justifie l'extension des quatre opérations arithmétiques classiques aux polynômes de degré quelconque, ce qui le conduira à la construction du triangle dit de Pascal jusqu'à l'ordre 12 , au développement du binôme dit de Newton. Il envisage d'engendrer toutes les puissances à partir de l'inconnue. La découverte et la lecture des travaux de Diophante à la lumière des conceptions algébriques et des méthodes d'al Khwārizmī et d'autres algébristes arabes ont permis à Al-Karajī de donner un nouveau départ à algèbre. Ses écrits n'ont certainement pas été connus dans l'Andalus.

- **As-Samaw'al** (mort en 1175) : dans *Le livre flamboyant*, il poursuit et systématise l'œuvre d'al-Karajī sur les polynômes ; il donne la définition de la puissance nulle ($x^0 = 1$) ; il justifie la division d'un polynôme par un autre, il propose une méthode d'extraction de la racine carrée et de la racine cubique d'un polynome en x et $1/x$, en utilisant le symbolisme des tableaux[4].

1. Celui-ci est également l'auteur d'un traité d'arithmétique qui constitue la première introduction à Bagdad des méthodes indiennes de calcul (système décimal de position avec zéro et opérations effectuées dans ce système) ; ce sont les nombreuses traductions latines de ses travaux qui ont faire découvrir à l'Europe du XIIe siècle le "calcul indien". En astronomie, il établit des tables astronomiques (Zij as-Sindhind : tables indiennes) (813) basé sur un ouvrage indien offert à al-Mansur mais aussi sur des tables d'astronomie persanne et grecques (Almageste de Ptolémée).
2. En notation moderne : $ax^2 = bx$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx = c$, $ax^2 = bx + c$
3. Les chinois savaient manier des systèmes de n équations à n inconnues (méthode de la triangulation de la matrice et résolution de proche en proche des équations) et ils utilisaient des nombres négatifs.
4. Il donne et démontre, pour la première fois, dans toute sa généralité, sous la forme d'un tableau, de x^9 à x^{-9}, la règle $ax^m bx^n = abx^{m+n}$, où n et m sont des entiers relatifs, en utilisant implicitement l'isomorphisme

Les mathématiciens arabes ne réussiront pas à résoudre les équations du troisième degré par radicaux dans le cas général, ce sera l'œuvre de l'école italienne du XVIe siècle ; ils ne parviendront à résoudre que certaines équations particulières.

- **Al-Khayyām** (1048-1131 environ) se propose d'élaborer une théorie générale des équations du troisième degré. Il donne, sur le modèle de la classification d'al-Khwārizmī, une classification systématique de ces équations, qu'il résout par l'intersection de deux coniques [5].

- **Sharaf al-Dīn al-Tūsī** (XIIe siècle) poursuit l'œuvre de Al-Khayyām .

Il va étudier de façon plus rigoureuse les conditions d'existence des points d'intersection de ces coniques ; il ne s'intéresse qu'aux racines positives.

L'algèbre arabe en Occident musulman : La circulation des savoirs et les traductions

A partir du milieu du IXe s., venus d'Orient, les ouvrages d'algèbre des précurseurs ainsi que les copies des textes grecs convergeront vers Cordoue en **al-Andalus** et Karouan au Maghreb, ce qui a permis d'y développer une activité algébrique. Plus tard au XIIe s. c'est le mouvement inverse qui se produira, les écrits de ces savants d'Al Andalus et du Maghreb seront portés lors de leurs voyage au Caire, à Damas, Bagdad, et Samarkande.

Aux XIIe et XIIIe siècles, en al-Andalus, l'algèbre va alors se developper grâce au travail des **traducteurs** de ces textes d'arabe en latin (voire d'arabe en hébreu) et du travail de certains savants qui ont appris l'arabe. Les mathématiciens d'al Andalus ont alors pu étudier les textes algébriques pour ensuite les commenter, les compléter et s'en inspirer pour écrire alors des ouvrages d'algèbre en latin ou dans leur langue maternelle (citons le juif Savasorda de Saragosse).

L'Abrégé d'al Khwārizmī est traduit par Gérard de Crémone (1114-1187), Robert de Chester (vers 1141) et Guillaume de Lunis (XIIIe s.) ; il y a eu aussi une traduction hébraïque. Le Livre complet d'Abū Kāmil a été traduit en latin au XIIe s. et en hébreu vers 1475. La diffusion des ouvrages par les écrits hébraïques en Espagne chrétienne, le Midi de la France, l'Italie a été significative entre le XIIe et le XVIIe siècle.

Leonardo de Pise (plus connu sous le nom de Fibonacci) connaissait l'arabe. Dans le *Liber Abaci* (1202), il y expose les éléments d'algèbre appris au Maghreb.

Le symbolisme en algèbre n'apparaît qu'après le XIIIe s. : la barre de fraction pour séparer le numérateur du dénominateur , le symbole racine, ... On ne sait rien sur l'origine de ce

---

des groupes $(Z, +)$ et $(a^n, n \in Z, a > 0)$. Il étudie également le produit et la divisibilité de polynômes dans $Q[X, 1/X]$ et dans $Q[X]$, division avec reste et donne une approximation des fractions rationnelles et des racines carrées de polynômes à coefficients rationnels, par des éléments de $Q(x, 1/x)$, (c'est-à-dire en donne un développement limité au voisinage de $+\infty$)

5. Cette interprétation géométrique lui est rendue possible par le choix d'une unité, qui lui permet d'interpréter toute grandeur comme, au choix, une longueur, une surface ou un volume ; les équations du troisième degré peuvent ainsi être rendues homogènes et lues en termes de relations entre volumes (le pas suivant sera franchi par Descartes qui, une fois choisie l'unité de longueur, interprète la multiplication comme produisant une nouvelle longueur et non plus comme la construction d'un rectangle). La discussion, encore maladroite, de l'existence du point d'intersection de ces coniques repose sur l'idée intuitive de la continuité des courbes (basée sur le mouvement, c'est-à-dire la continuité du temps) et de leur convexité ainsi que sur l'étude de leurs branches infinies, ce qui va déboucher sur l'étude de nouvelles propriétés des coniques (convexité et étude locale en particulier.)

symbolisme. Ce symbolisme a été adopté par les traductions latines et hébraïques par Gérard de Crémone et Moïse Ibn Tibbon au XIIIe s.

A la fin du XIIIe s. et au XIVe s., les méthodes algébriques dites "arabes" disponibles en latin se sont développées en Catalogne, au Sud de la France, en Italie puis en Allemagne et dans des régions du nord de l'Europe. Elles se sont développées en hébreu, en catalan, en occitan, en provençal, en allemand et en langues vernaculaires de l'Italie. (Voir pour cela, le panneau "les mathématiques en Occitanie") On trouve une énorme production en Italie car il y a une classe de marchands grande consommatrice de manuels de calcul. Par contre en France la production algébrique est moindre ; ceci est dû en autre à la guerre de Cent ans (1339- 1453), au conservatisme des universités vis-à-vis de l'algèbre ”arabe”.

Références

[1] Hélène Bellosta (Institut français d'études arabes de Damas) *À propos des sciences arabes* SMF - Gazette - 82, octobre 1999.

[2] Ahmed Djebbar (professeur à l'université de Lille 1), *L'algèbre arabe. Genèse d'un art* (ed. Vuibert, 2005).

[3] Roshdi Rashed avec la collaboration de Régis Morelon *Histoire des sciences arabes,* Le Seuil 1997, 3 volumes.