COMPTER

EN MEDITERRANEE

ON MULTIPLIE

I. Multiplier en Mésopotamie

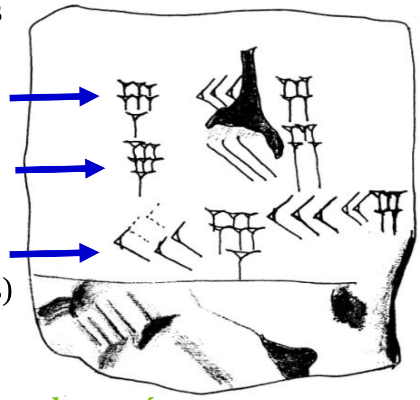
1. Compter en base 60

Lorsque nous écrivons 455 dans notre système décimal (en base 10), nous écrivons 4 centaines, 5 dizaines et 5 unités.
D'autres civilisations ont utilisé d'autres bases.
Les mésopotamiens écrivaient les nombres en base 60
(avec 1 soixantaine = 60 unités, une soixantaine de soixantaine vaut 3600 unités,…)
Un clou représente 1 unité, un chevron représente 10 unités

7 clous, 3 chevrons et 5 clous (7 soixantaines et 35 unités)

7 clous, 3 chevrons et 5 clous (7 soixantaines et 35 unités)

5 chevrons et 7 clous, 3 chevrons, 2 chevrons et 5 clous
(57 soixantaines de soixantaines, 30 soixantaines, 25 unités)



2. Tout entier est décomposable en une somme de carrés

Cette propriété, connue de façon empirique par les mésopotamiens, intéressa les mathématiciens au cours des siècles suivants.

Cette décomposition n'est naturellement pas unique
Une décomposition triviale est bien entendu une somme de 1^2
Le 1008 de notre panneau peut aussi s'écrire :
$28^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2$ ou $31^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$ ou $30^2 + 10^2 + 2^2 + 2^2$ …

- **Pythagore** (VIe siècle avant J.-C.) s'intéressa aux carrés décomposables en somme de deux carrés, obtenant ce qu'on appelle aujourd'hui les triplets pythagoriciens (côtés d'un triangle rectangle).
  Le plus fameux est (3, 4, 5) mais aussi (5, 12, 13) ou (8, 15, 17) ou ...
- **Euclide** (vers 320 - 260 av. J.C.) montre dans son livre X comment construire des carrés dont la somme ou la différence forment encore des carrés.
- **Diophante** ((IIIe siècle av. J.C.) démontre l'identité (écrite dans notre langage actuel) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2$ qui permet, connaissant 4 carrés a, b, c et d, d'en former un nouveau $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ s'écrivant comme la somme de deux carrés $(ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2$.
- **Fermat** (1605-1665) démontra qu' « un entier n est somme de deux carrés si, dans la décomposition en facteurs premiers de n, tous les facteurs premiers de la forme $p = 4k \pm 1$ ont des exposants pairs ».
  Exemple : $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$ avec $3 = 4 \times 1 - 1$ et $7 = 4 \times 2 + 1$
  On peut effectivement écrire $882 = 21^2 + 21^2$
- **Lagrange** démontra en 1770 que « tout entier positif peut s'écrire comme somme de quatre carrés ».
  On peut ainsi écrire $882 = 29^2 + 6^2 + 2^2 + 1^2$ ou $1008 = 30^2 + 10^2 + 2^2 + 2^2$

II. Multiplier dans l'Égypte ancienne

Un premier algorithme :

Le principe : La multiplication par 2 et la division par 2 se neutralisent

36 x 28 = (36 x 2) x (28 : 2) = 72 x 14 = (72 x 2) x (14 : 2) = 144 x 7

Mais 7 est un entier impair : 7 = 2 x 3 + 1

donc 144 x 7 = $(144\times 2)\times(7:2)=(144\times 2)\times\frac{2\times 3+1}{2}=288\times 3+144$

De même, $288\times 3=(288\times 2)\times(3:2)=(288\times 2)\times\frac{1\times 2+1}{2}=576\times 1+288$

Donc 36 x 28 = 72 x 14 = 144 x 7 = 288 x 3 + 144 = 576 x 1 + 288 + 144

D'une manière générale, tout entier *b* impair peut s'écrire 2*n* + 1 où *n* est un entier naturel

Si *a* et *b* sont deux entiers et si *b* est impair alors on peut écrire

$a\times b=(a\times 2)\times(b:2)=(a\times 2)\times\frac{2\times n+1}{2}=2a\times n+a$, où n est le quotient euclidien de b par 2.

Un deuxième algorithme :

Les principes : **1.** Tout entier est décomposable en une somme de puissances de 2

28 = 16 + 8 + 4 = $2^4 + 2^3 + 2^2$ c'est le principe de la décomposition en base 2.

2. La multiplication est distributive rapport à l'addition.

Preuve de l'algorithme :
On remplace l'un des facteurs par sa décomposition en somme de puissances de 2.

36 x 28 = 36 ($2^4 + 2^3 + 2^2$) = 36 x 2^4 + 36 x 2^3 + 36 x 2^2 = 576 + 288 + 144 = 1008 ,
Le produit est la somme des nombres qui sont écrits en face de 16, 8 et 4

28 x 36 = 144 + 288 + 576 = 1008

III. L'algorithme d'Al Tusi

Le principe :
Il repose sur les mêmes propriétés que notre algorithme actuel :

La décomposition additive d'un entier écrit dans le système décimal
ici 352= 300 + 50 + 2 (3 centaines, 5 dizaines et 2 unités)

et **la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**
352 x 4 = (2 + 50 + 300) x 4= 2 x 4 + 50 x 4 + 300 x 4

Al Tusi, contrairement à nous, ne multiplie pas les 2 unités, puis les 5 dizaines et enfin les 3 centaines par 4, mais multiplie les 2 unités, puis les 3 centaines, et, dans un deuxième temps, les 5 dizaines par 4 ce qui évite les retenues que nous rencontrons aujourd'hui dans nos produits.
352 x 4 = (2 x 4 + 300 x 4) + 50 x 4 = 8 + 1200 + 200 = 1408

Sur la première ligne, il écrit 08 et non 8 pour laisser la place des dizaines, le 12 obtenu à l'étape suivante correspondant à 12 centaines.

En revanche, et nous l'avons conservé (c'est notre fameux décalage), il n'écrit pas 200 mais 20 dizaines sur la deuxième ligne en alignant unités, dizaines, centaines,… pour l'addition finale.

```
 352
   4
1208
  20
1408
```

Un autre exemple :

Pour multiplier 352 par 164, on procède comme suit :
- ***Étape 1*** : On multiplie 4 par 2 (=08) puis 4 par 3 (=12), ce qui donne 1208.
- ***Étape 2*** : On multiplie 4 par 5 (=20), que l'on écrit sur la ligne suivante, en décalant d'un rang.
- On réitère ces deux étapes pour les autres chiffres de 164, en décalant chaque fois d'un rang.
- ***Étape finale*** : On ajoute tous les résultats intermédiaires.

Étape 1	*Étape 2*	*Étape 1bis*	*Étape 2bis*	*Étape 1ter*	*Étape 2ter*	*Étape finale*
352 164 1208	352 164 1208 20	352 164 1208 20 1812	352 164 1208 20 1812 30	352 164 1208 20 1812 30 302	352 164 1208 20 1812 30 302 5	352 164 1208 20 1812 30 302 5 57728

IV. La multiplication « per gelosia »

Une technique qui évite les retenues dans les produits

Nous allons effectuer le produit de 935 par 42 par la méthode « per gelosia ».

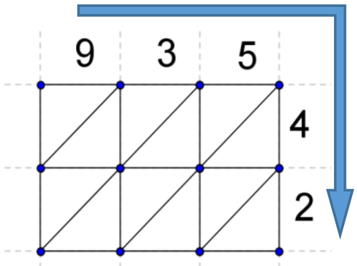
Le principe :
Il repose sur les mêmes propriétés que notre algorithme actuel :
La décomposition additive d'un entier écrit dans le système décimal

ici 935 = 900 + 30 + 5 et 42 = 40 + 2

et **la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**
ici 935 x 42 = (900 + 30 + 5) x (40 + 2) = 900 x 40 + 900 x 2 + 30 x 40 + 30 x 2 + 5 x 40 + 5 x 2.

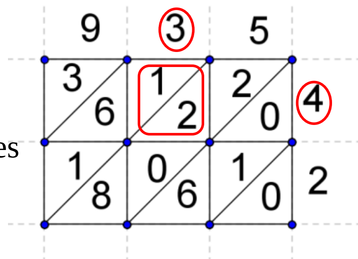
On effectue l'opération sur un damier dont :
- le nombre de lignes est égal au nombre de chiffres du multiplicande
- le nombre de colonnes est égal au nombre de chiffres du multiplicateur
- chaque carré est séparé en deux selon une diagonale.

Étape 1 :



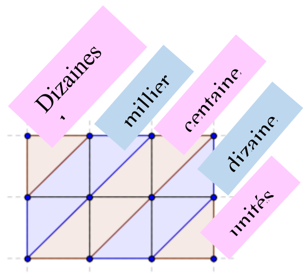
On inscrit les nombres au-dessus et à droite du damier.

Étape 2 :



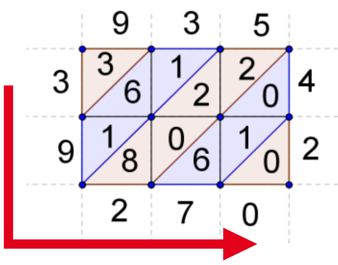
Dans chaque case, on effectue le produit des nombres inscrits sur la ligne et la colonne correspondantes en écrivant le chiffre des dizaines au-dessus de la diagonale et le chiffre des unités au-dessous

Chaque bande oblique du tableau correspond à l'une des unités du système décimal (en partant d'en bas à droite : unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers,…).



Étape 3 :

On ajoute les nombres inscrits dans chaque bande oblique en commençant par le coin en bas à droite et en reportant une éventuelle retenue dans la bande suivante



Étape 4 :

On relève les chiffres inscrits à gauche et sous la grille dans le sens de le flèche. On obtient :

935 x 42 = 39 270