REPRESENTER

LES CINQ SOLIDES DE PLATON

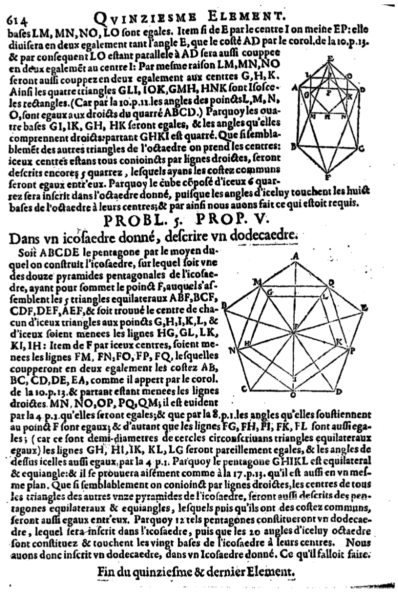
Définition : *Un polyèdre est dit **régulier** si ses faces sont des polygones réguliers tous identiques, et s'il y a un même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet.*

Dès l'Antiquité les mathématiciens grecs ont recherché la régularité et l'harmonie des figures géométriques, d'où la recherche de figures répondant à des critères de symétrie. En ce qui concerne les solides, les pythagoriciens en connaissaient trois (le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre).

C'est probablement **Théétète** (env. -415, -395), élève de Socrate, qui serait le premier théoricien de ces objets appelés solides de Platon dans l'antiquité et polyèdres réguliers convexes de nos jours.

C'est **Platon** qui le premier mentionne les 5 polyèdres réguliers convexes dans le ***Timée***. Il en faisait des objets mystiques : le **Tétraèdre** est associé au **Feu**, le **cube** à la **Terre**, l'**octaèdre** à l'**Air** et l'**Icosaèdre** à l'**Eau**. **Euclide** (-325, -265) en a donné une description mathématique complète dans *Les Eléments*. Les propositions 13-17 du Livre XIII, vraisemblablement écrites par Théétète, expliquent comment construire tétraèdre, de l'octaèdre, du cube, de l'icosaèdre et du dodécaèdre dans cet ordre et comment les inscrire dans une sphère.

Dans *Le Timée*, Platon explique que la structure de l'univers est mathématique. Plus tard en 1595, Kepler dans le *Mysterium Cosmographicum* conjectura que ces cinq solides réguliers et les espaces entre les six planètes connues à cette époque (les planètes "coperniciennes") étaient en relation. Il pensait que ces solides réguliers étaient la clef de la compréhension de l'architecture de l'univers.



614 QVINZIESME ELEMENT.

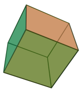
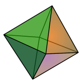
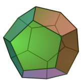
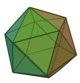
baſes LM, MN, NO, LO ſont egales. Item ſi de E par le centre I on meine EP: elle diuiſera en deux egalement tant l'angle E, que le coſté AD par le corol. de la 10.p.13. & par conſequent LO eſtant parallele à AD ſera auſſi couppee en deux egalemẽt au centre I: Par meſme raiſon LM, MN, NO seront auſſi couppez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainſi les quatre triangles GLI, IOK, GMH, HNK ſont Iſoſceles rectangles. (Car par la 10.p.11. les angles des poincts L, M, N, O, ſont egaux aux droicts du quarré ABCD.) Parquoy les quatre baſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI eſt quarré. Que ſi ſemblablemẽt des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres eſtans tous conioincts par lignes droictes, ſeront deſcrits encores 5 quarrez, leſquels ayans les coſtez communs ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cube cõpoſé d'iceux 6 quarrez ſera inſcrit dans l'octaedre donné, puiſque les angles d'iceluy touchent les huict baſes de l'octaedre à leurs centres; & par ainſi nous auons fait ce qui eſtoit requis.

PROBL. 5. PROP. V.

Dans vn icoſaedre donné, deſcrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on conſtruit l'icoſaedre, ſur lequel ſoit vne des douze pyramides pentagonales de l'icoſaedre, ayant pour ſommet le poinct F, auquel s'aſſemblent les 5 triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & ſoit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH: Item de F par iceux centres, ſoient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, leſquelles coupperont en deux egalement les coſtez AB, BC, CD, DE, EA, comme il appert par le corol. de la 10.p.13. & partant eſtant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il eſt euident par la 4 p.1. qu'elles ſeront egales; & que par la 8.p.1. les angles qu'elles ſouſtiennent au poinct F ſont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL ſont auſſi egales; (car ce ſont demi-diametres de cercles circonſcriuans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG ſeront pareillement egales, & les angles de deſſus icelles auſſi egaux, par la 4 p.1. Parquoy le pentagone GHIKL eſt equilateral & equiangle: & il ſe prouuera aiſément comme à la 17.p.13. qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Que ſi ſemblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres vnze pyramides de l'icoſaedre, ſeront auſſi deſcrits des pentagones equilateraux & equiangles, leſquels puis qu'ils ont des coſtez communs, ſeront auſſi egaux entr'eux. Parquoy 12 tels pentagones conſtitueront vn dodecaedre, lequel ſera inſcrit dans l'icoſaedre, puis que les 20 angles d'iceluy octaedre ſont conſtituez & touchent les vingt baſes de l'icoſaedre à leurs centres. Nous auons donc inſcrit vn dodecaedre, dans vn Icoſaedre donné. Ce qu'il falloit faire.

Fin du quinzieſme & dernier Element.

	Nombre faces et nature	Nombre sommets et nature	Nombre d'arêtes	Symétries	Dual
Tétraèdre 	4 triangles équilatéraux	4 sommets de 3 triangles	6	24	tétraèdre
Cube 	6 carrés	8 sommets de 3 carrés	12	48	octaèdre
Octaèdre 	8 triangles équilatéraux	6 sommets de 4 triangles	12	48	cube
Dodécaèdre 	12 pentagones	20 sommets de 3 pentagones	30	120	icosaèdre
Icosaèdre 	20 triangles équilatéraux	12 sommets de 5 triangles	30	120	dodécaèdre

Le dual d'un polyèdre régulier est obtenu en reliant les centres de faces adjacentes. Exemple : Un dual cube-octaèdre.

Pourquoi seulement cinq polyèdres réguliers convexes ?

démontré par d'Euclide

Le nombre de polygones réguliers en chacun de ses sommets est au minimum de 3. Le maximum dépend de l'angle du polygone régulier ; la somme des angles au sommet ne doit pas atteindre ou dépasser 360°.

Si le polygone régulier a 3 côtés (triangle équilatéral), chaque angle au sommet mesure 60°, on peut donc en placer 3, 4 ou 5 pour obtenir le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, mais pas six car 6x60°=360°.

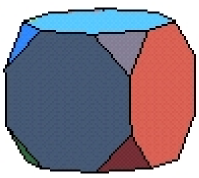
Si le polygone régulier a 4 côtés (carré), chaque angle au sommet mesure 90°, on peut donc en placer 3 pour obtenir le cube, mais pas quatre car 4x90°=360°.

Si le polygone régulier a 5 côtés (pentagone), chaque angle mesure 108°, on peut donc en placer 3 pour obtenir le le dodécaèdre mais pas quatre car 4x108°=436°, supérieur à 360°.

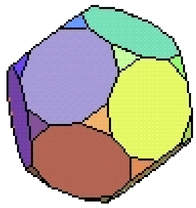
Si le polygone régulier a 6 côtés (hexagone), chaque angle mesure 120°, on ne peut même pas en placer 3 car 3x120°=360°, Donc il n'existe pas de polyèdres réguliers construits avec des polygones réguliers à plus de 5 côtés.

LES 13 POLYEDRES ARCHIMEDIENS

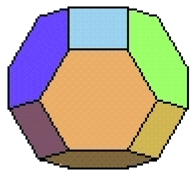
Les 13 polyèdres archimédiens sont des polyèdres convexes composés de polygones réguliers, le même arrangement de polygones régulier se retrouve à chaque sommet.



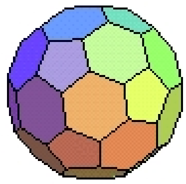
Cube tronqué



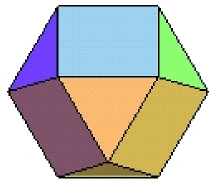
dodécaèdre faiblement tronqué



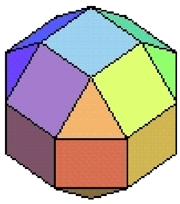
octaèdre tronqué



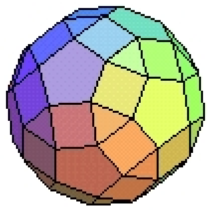
icosaèdre tronqué



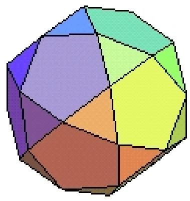
cuboctaèdre



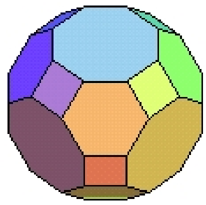
Rhombicubeoctaèdre



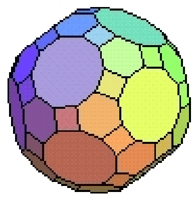
Dodecaedre-chanfreiné



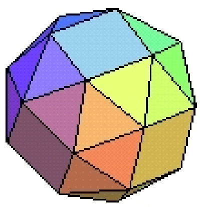
Dodécaèdre tronqué



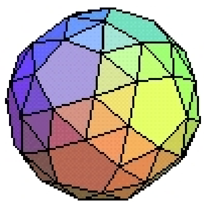
Cuboctaèdre tronqué



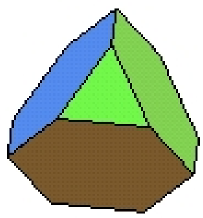
Dodécaèdre arêtes et sommets tronqués



Cube adouci



Dodécaèdre adouci



Tétraèdre tronqué

Références

[1] Jean-Jacques Dupas. *Les polyèdres dans l'Antiquité*. Tangente, Hors Série n°30. Histoire des Mathématiques

[2] Jean-Jacques Dupas. *Tout sur les polyèdres : des solides de Platon aux étoiles de Poinsot-Kepler*. http ://culturemath.ens.fr/video/Dupas-polyedres/Dupas-index.htm

[3] Thérèse Eveilleau. *Les solides de Platon*. http ://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/platon.htm