



La branche des mathématiques que nous appelons aujourd'hui la trigonométrie a des origines lointaines. Des Égyptiens Antiques et des Babyloniens ont commencé à examiner les rapports des côtés de triangles semblables, mais ils n'y avaient aucun concept de mesure angulaire. Les mathématiciens-astronomes grecs ont commencé une étude systématique de relations entre des angles dans un cercle et les longueurs de cordes les sous-tendant.

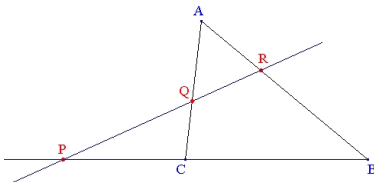
À Alexandrie, aux Ier et IIe siècles après J.C., Hipparque de Nicée (190-120 av.J.C.), Ménélaüs (vers 100 ap. J.C.) et Ptolémée (vers 90 - 168), reprennent et développent les travaux de leurs prédécesseurs en géométrie, en astronomie. C'est avec eux que naît ce que nous appelons aujourd'hui la trigonométrie.

- **HIPPARQUE DE NICÉE** est connu comme "le père de trigonométrie".



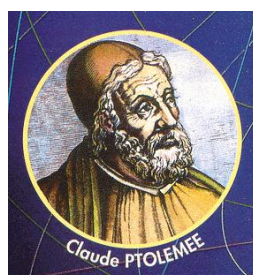
Il a établi la première table trigonométrique pendant la deuxième moitié du deuxième siècle av. J.-C. en vue d'une utilisation en astronomie. L'utilisation systématique du cercle de 360° semble probablement lui être due. Son travail nous est connu grâce à Ptolémée qui y fait référence dans l'Almageste.

- **MÉNÉLAÛS**, mathématicien et astronome grec, ayant vécu à Alexandrie au Ier-IIe siècle. Selon Ptolémée, il fit d'intéressantes observations célestes à Rome. On lui doit les premiers résultats de ce qu'on appellera au XVIe siècle la trigonométrie sphérique. Son nom est resté rattaché au théorème dit de "Menelaus" :



$$P, Q, R \text{ sont alignés si et seulement si : } \frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$$

- **CLAUDE PTOLÉMÉE** vécut au IIe siècle à Alexandrie. Il est l'un des mathématiciens le plus prolifique de l'antiquité, composants de remarquables synthèses.



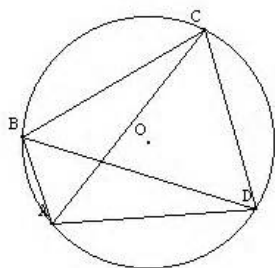
Le plus célèbre de ses écrits est connu sous le nom d'*Almageste* déformation de la traduction arabe (*al-Mijisti : La Très Grande*) de son titre grec (*Composition mathématique*). Traduite en latin puis en arabe, l'*Almageste* fera autorité durant quatorze siècles, c'est ainsi que s'imposera une conception géocentrique de l'univers, jusqu'au XVIe siècle où Copernic, Galilée et Kepler reprendront et amélioreront la théorie héliocentrique d'Aristarque complètement tombée dans l'oubli.



Dans l'*Almageste*, Ptolémée veut suivre une méthode rigoureuse (comme l'a fait Euclide en géométrie) ; il établit des démonstrations de ses propositions. Sa trigonométrie se fonde sur celle d'Hipparque, mais il a également connaissance de l'œuvre de Ménélaos, qui a développé la trigonométrie sphérique et qu'il cite dans l'*Almageste*.

L'approche de Ptolémée nécessitait de nouvelles techniques géométriques que l'on nomme aujourd'hui "trigonométrie", qu'il expose dans son premier livre, sous forme d'une table des cordes dans le cercle (proche de nos tables de sinus actuelles). Dans chaque cas, il explique comment il a construit ses tables.

Il divise la circonférence d'un cercle en 360 parties (degrés d'arcs) et le diamètre en 120 parties. Ptolémée construit ses tables à l'aide de quatre règles accompagnées de leurs démonstrations[5] qui donnent respectivement les formules permettant de calculer la corde sous-tendue par l'angle supplémentaire, la corde sous-tendue par l'angle moitié, les cordes sous-tendues par la différence ou la somme de deux angles.



Théorème de Ptolémée

Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Un cas spécial du Théorème de Ptolémée (quand le côté *AD* est le diamètre du cercle) nous conduit aux identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= (\sin\alpha \cdot \cos\beta) \pm (\cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= (\cos\alpha \cdot \cos\beta) \mp (\sin\alpha \cdot \sin\beta) \end{aligned}$$

L'équivalent de la formule for $\sin(\alpha - \beta)$ avec la formule de l'angle moitié a permis à Ptolémée de construire effectivement ses tables trigonométriques.

Dans le monde arabo-musulman

C'est aussi pour les besoins de l'astronomie que se développe la trigonométrie plane et sphérique.

À Bagdad au IX^e siècle sous l'impulsion du calife al-Ma'mûn la **Maison de la Sagesse** est en plein essor. Elle comporte une bibliothèque, mais aussi un centre de copies et de traductions et un centre de réunions. Les livres grecs sont acquis parfois comme prises de guerre, dans l'empire byzantin, puis traduits en arabe. La société musulmane s'estime alors héritière de la science antique.

A la Maison de la Sagesse, les mathématiciens astronomes vont bénéficier non seulement des traductions des textes grecs de Ménélaüs et Ptolémée, mais aussi des apports des notions de sinus et de *sinus verse* ($1 - \cos$) provenant de l'astronomie indienne ainsi que des tables astronomiques d'origine persane (connaissances qui n'étaient pas connues des mathématiciens grecs). Ils critiquent ces textes et les enrichissent grâce à des observations régulières des planètes et des constellations.

Les astronomes arabes s'intéressent aussi bien aux problèmes pratiques qu'aux aspects théoriques.



- **amélioration de l'astrolabe** : pour mesurer les positions des objets célestes, pour définir l'orientation des mosquées vers La Mecque, pour fixer les moments des cinq prières quotidiennes



- **vérification et amélioration des anciennes tables** : les astronomes ont de plus en plus d'exigences ; ils ne se contentent plus des anciennes tables ; ils vérifient les paramètres hérités des grecs puis faisant une synthèse des apports grecs et indiens, les astronomes essaient de démontrer les règles qui figurent dans les traités d'astronomie et les tables de sinus ou de cordes.

Ces efforts vont donner naissance à une floraison de traités, mathématiques d'une part, sur la "figure secteur" (le théorème de Ménélaüs), astronomiques d'autre part, les *zīj* (i.e. tables, *zīj* d'al-Battānī, *zīj* d'al-Farhānī, fin du IX^e siècle).

C'est dans le *zīj* de **Habash al-Hasib** dit "le calculateur", (originaire d'Égypte et contemporain d'al-Khwārizmī) que sont définis clairement le sinus et le sinus verse ; c'est également Habash qui le premier définit la tangente et en établit une table. Ceci passera cependant presque inaperçue. Il faudra attendre l'Almageste d'**Abū al-Wafā** (fin du Xe siècle) pour que son importance soit reconnue.

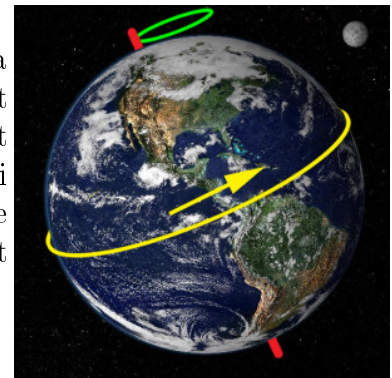
La découverte, au Xe siècle, du théorème des sinus dans le plan et du théorème des sinus sur la sphère (proportionnalité des sinus et des arcs correspondants des triangles sphériques), dont plusieurs mathématiciens, parmi lesquels Abū al-Wafā' al-Buzjānī, se disputent la paternité, sera la pierre de touche du renouveau de la trigonométrie sphérique.



Le *Traité du quadrilatère* de **Nasir al-Din al-Tusi** (1201-1274), synthèse complète des traités précédents, est considéré comme le plus important de la trigonométrie arabe. Nasir al-Din al-Tusi réalise des tables extrêmement précises du mouvement des planètes dans son ouvrage *Zij-i ilkhani* (*Tables ilkhaniennes*). Ce livre contient des tables pour calculer les positions des planètes ainsi que les noms des étoiles. Le système planétaire qu'il avait imaginé était le plus avancé de son temps et fut utilisé de manière intensive jusqu'à ce que Copernic développe son modèle héliocentrique. Entre Ptolémée et Copernic, il est considéré comme le savant le plus éminent sur ce sujet. (ref. Wikipédia)

De cet ouvrage a été tirée la Table des longitudes et des latitudes publiée en latin par Greaves, Londres, 1652.

Il avait également calculé une valeur de 51" par an pour la précession des équinoxes (la valeur actuellement admise étant d'environ 50 secondes), et a contribué à la construction et l'utilisation de nombreux instruments astronomiques, parmi lesquels des astrolabes. Il a par ailleurs réalisé la première publication des principes complets de la trigonométrie plane et sphérique.



Une partie de ces ouvrages arabes ont été traduits en latin au XIIème siècle.

La trigonométrie arabe, a cependant du mal à se dégager de l'astronomie et à constituer un chapitre autonome de géométrie. C'est vraisemblablement ce fait qui va freiner, voire même arrêter, son développement ultérieur; il faudra que la trigonométrie passe dans le monde latin, débarrassée d'une partie des traditions du calcul astronomique pour pouvoir donner lieu à de nouveaux développements[1].

Références

- [1] Hélène Bellosta (Institut français d'études arabes de Damas) *À propos des sciences arabes* SMF - Gazette - 82, octobre 1999.
- [2] Ptolémée Claude. *Almageste (Les compositions mathématiques)*. Edition et traduction M. Halma 1816. Site Gallica de la B.N.F. <http://gallica.bnf.fr>
- [3] Chaogui Zhang. *History of Mathematics : Greek Trigonometry*. Department of Mathematics, Marywood University. <http://math.marywood.edu/czhang>
- [4] Tangente. *L'invention de la Trigonométrie*. Hors série n°30, Histoire des mathématiques
- [5] Les Géomètres de la Grèce antique. Les génies de la Science, n°21. Pour la Science 2004, p92