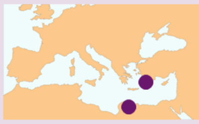
MESURER

MESURER LA TERRE ET LE CIEL
ARISTARQUE ET ERATOSTHÈNE

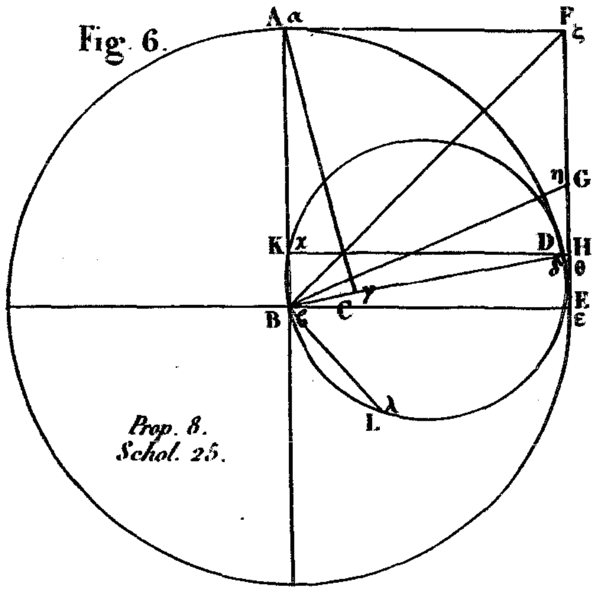


17 siècles avant Copernic, Aristarque émet l'hypothèse que c'est la Terre qui tourne autour du Soleil et Eratosthène évalue le rayon de la Terre à 2% près.

1. Un exemple de demonstration d'Aristarque

Démonstration de la proposition VIII d'Aristarque dans « Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune » :

« La distance à laquelle le soleil se trouve de la terre est plus grande dix-huit fois, mais moindre de vingt fois que celle à laquelle la lune se trouve de la terre »



Le texte originel traduit en français :

Soit en effet (fig. 6) A le centre du soleil, et B le centre de la terre; que la ligne AB, qui joint ces deux centres, .soit prolongée; que le centre de la lune, dans sa dichotomie, soit C. Par AB et C, je fais passer un plan dont la section avec la sphère, dans laquelle se meut le centre du soleil, sera un grand cercle ADE. Soient tirées les lignes AC, BC, et soit prolongée BC jusqu'en D. Puisque le point C est le centre de la lune dans sa dichotomie, l'angle ACB sera droit. Du centre B je tire sur AB la perpendiculaire BE. L'arc DE sera conséquemment la trentième partie de l'arc ADE. En effet, l'une de nos hypothèses (la quatrième) est que la lune, dans sa dichotomie, est éloignée du soleil d'un quart de la circonférence, moins la trentième partie de ce quart; donc l'angle CBE est aussi la trentième partie d'un angle droit. Soit achevé le parallélogramme AE, et soit tirée la diagonale BF ; l'angle EBF sera la moitié d'un angle droit; que cet angle EBF soit coupé en deux parties égales par la ligne BG; l'angle EBG sera conséquemment le quart d'un angle droit. Mais l'angle DBE est la trentième partie d'un angle droit; donc la proportion de l'angle EBG à l'angle DBE est celle des nombres 15 et 2. En effet, si l'angle droit est divisé en 60 parties, l'angle EBG en aura 15, et l'angle DBE 2; et puisque le rapport de EG à EH est plus grand que celui de l'angle EBG à l'angle DBE, celui de EG à EH sera plus grand que celui de 15 à 2. Or BE est égale à EF, et l'angle en E est droit; ainsi le carré construit sur BF est le double du carré construit sur BE. Mais on a cette proportion:

comme le carré construit sur BF est au carré construit sur BE, ainsi le carré construit sur FG est au carré construit sur EG. Ainsi le carré construit sur FG sera double de celui construit sur EG. Or 49 est moindre que le double de 25. Ainsi, le carré construit sur FG a, avec le carré construit sur EG, un rapport plus grand que celui de 49 à 25; et conséquemment le côté FG a, avec le côté EG, un rapport plus grand que celui de 7 à 5. *Componendo*, on aura EF est à EG dans un rapport plus grand que celui de 12 à 5 ou de 36 à 15. Mais on a prouvé que EG est à EH dans un rapport plus grand que celui de 15 à 2, donc l'antécédent de cette proportion étant égal au conséquent de l'autre, on en conclura que EF : EH dans un rapport plus grand que celui de 36 à 2 ou de 18 à 1. Ainsi EF est plus de 18 fois plus grande que EH. Or EF est égale à BE; donc BE est aussi plus de 18 fois plus grande que EH. A plus forte raison BH sera-t-elle plus de 18 fois plus grande que EH. Mais, à cause de la similitude des triangles, comme BH est à EH, ainsi AB est à BC. AB est donc aussi plus de 18 fois plus grande que BC. Or AB est la distance du soleil à la terre, et BC est celle de la lune à la terre: donc la distance du soleil à la terre est plus de 18 fois plus grande que celle de la lune à la terre.

Il reste à prouver qu'elle est moins de 20 fois plus grande. Pour y réussir, par le point D, je mène DK parallèle à BE, et autour du triangle BDK, je construis le cercle BKDL. BD sera le diamètre de ce cercle, puisque l'angle en K est droit. Je porte le rayon de ce cercle au point L, en sorte que BL sera le côté de l'hexagone. Puis donc que l'angle DBE est la trentième partie d'un angle droit, BDK sera de même la trentième partie d'un angle droit. Ainsi l'arc BK sera la soixantième partie de la circonférence entière. Or BL est la sixième partie de cette même circonférence; ainsi l'arc BL sera décuple de l'arc BK. Mais l'arc BL a, avec l'arc BK, un rapport plus grand que la ligne droite BL avec.la ligne droite BK. Ainsi la droite BL est moins de 10 fois plus grande que la droite BK. Or le diamètre BD est double du rayon BL; ainsi BD est moins de 20 fois plus grande que BK. Mais on a la proportion BD est à BK, comme AB est à BC. Ainsi AB est moins de 20 fois plus grande que BC. Or AB est la distance du soleil à la terre, et BC est celle de la lune à la terre: donc la distance du soleil à la terre est moins de 20 fois plus grande que celle de la lune à la terre. On se souvient qu'il a été démontré que cette première distance est plus de 18 fois plus grande que la seconde.

Ou, en langage plus contemporain :

Soit A le centre du Soleil, B le centre de la Terre et C le centre de la Lune. Traçons le cercle (c) de centre B et de rayon AB, le rayon BD passant par C et faisant un angle de 3° avec le rayon BE perpendiculaire à BA (l'angle CBE est la trentième partie de l'angle droit). On construit le carré ABEF, ainsi que sa diagonale BF. Soit BG la bissectrice de l'angle EBF.

L'angle CBE est la trentième partie d'un angle droit (90°/30) et l'angle GBE est le quart d'un angle droit (90°/4), donc l'angle GBE vaut les 15/2 de l'angle CBE. Le rapport de EG sur EH est plus grand que le rapport des deux angles GBE et CBE, donc plus grand que 15/2.

BF est la diagonale du carré ABEF, donc le carré de BF est le double du carré de BE. De plus le carré construit sur FG est aussi le double du carré construit sur EG.

Or comme 49 est inférieur au double de 25, le carré de FG/EG = 2 est supérieur à 49/25, le rapport FG/EG est donc supérieur à 7/5.

Donc EF/EG = (EG+GF)/EG = 1 + GF/EG est supérieur à 12/5 ou 36/15.

Ainsi EG/EH est plus grand que 15/2 et EF/EG est supérieur à 36/15, donc EF/EH est supérieur à 18. Or EF = BE, donc BE/EH est supérieur à 18, et comme BH est supérieur à BE, BH/EH est également supérieur à 18. Or les triangles ABC et EBH sont semblables, donc les rapports BH/EH et AB/BC sont égaux et l'on a bien BA supérieur à 18 BC.

La distance Terre-Soleil est supérieure à 18 fois la distance Lune-Soleil.

Reste à prouver que ce rapport est inférieur à 20. Pour cela traçons la parallèle à BE, cette parallèle coupe AB en K. Traçons le cercle passant par les points BDK et soit L le point du cercle tel que LB soit le côté d'un hexagone inscrit dans ce cercle.

L'angle DBK est égal à l'angle DBE égal à la trentième partie d'un angle droit, l'arc de cercle BK vaut le double donc la quinzième partie d'un angle droit ou encore la soixantième partie de la circonférence.

Or BL est la sixième partie de cette même circonférence; donc l'arc BL est dix fois plus grand que l'arc BK. Or le rapport des cordes BL/BK est inférieur au rapport des arcs BL/BK, donc la corde BL est inférieure à dix fois la corde BK.

Or BD est égal à deux BL, donc BD est inférieur à 20 BK. Or les triangles DKB et ABC sont semblables donc BD/BK = AB/BC, donc AB est bien inférieur à 20 BC.

2. BIBLIOGRAPHIE

(1) http://media4.obspm.fr/public/AMC/index.html site de l'observatoire de Paris

(2) http://remacle.org/bloodwolf/erudits/aristarque/soleil.htm site «L'antiquité grecque et latine du moyen âge »

(3) Moments et problèmes dans l'histoire de l'astronomie Fascicule VIII. Formation continue des Maîtres en astronomie, Université Paris XI Orsay

(4) Traité d'Aristarque de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune, Albert Blanchard, 2003

(5) http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/553615?lang=fr édition de Pappus traduite en latin 1572

(6) http://books.google.fr/books/about/Trait%C3%A9_d_Aristarque_de_Samos_sur_les_gr.html?hl=fr&id=z4y4AAAAIAAJ édition en français 1823 par le Comte de Forcia d'Urban

(7) « Eratosthène de Cyrène, le pionnier de la géographie » Germaine Aujac, Editions CHTS, 2001

(8) http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/pratique/textes/eratoste.htm site de Thérèse Eveilleau

(9) http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_eclipses-lune/stlp-demonstration-aristarque.html site de l'IMCCE