MESURER

AUX ORIGINES DU CALCUL INTÉGRAL

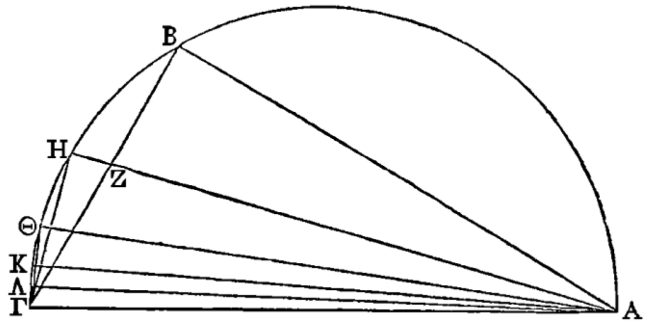
ARCHIMÈDE

Syracuse (Sicile)
env -287 à -212 av JC

1. Calculs (d'Archimede) pour obtenir l'approximation de π

La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les 10/71e de ce même diamètre.

Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre et dont le point E est le centre ; que la droite ΓΛΖ soit une tangente, et que l'angle ΖΕΓ soit la troisième partie d'un angle droit La droite EZ sera à la droite ΖΓ comme 306 est à 153; et la raison de ΕΓ à ΓΖ sera plus grande que la raison de 265 à 153.



Partageons l'angle ΖΕΓ en deux parties égales par la droite EH ; la droite ZE sera à la droite ΕΓ comme ZH est à ΗΓ. Donc, par permutation et par addition, la somme des droites ZE, ΕΓ est à la droite ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ. Donc la raison de la droite ΓΕ à la droite ΓΗ est plus grande que la raison de 571 à 153. Donc la raison du carré de EH au carré de ΗΓ est plus grande que la raison de 349450 à 23409, et la raison de EH à ΗΓ plus grande que la raison de 591 1/8 à 153 .

Partageons l'angle ΗΕΓ en deux parties égales par la droite EH ; la raison de ΕΓ à ΓΘ sera plus grande que la raison de 1162 à 153. Donc la raison de ΘΕ à ΘΓ est plus grande que la raison de 1162 1/8 à 153.

Partageons encore l'angle ΘΕΓ en deux parties égales par la droite EK ; la raison de ΕΓ à ΓΚ sera, plus grande que la raison de 2334 ¼ à 153. Donc la raison de EK à ne est plus grande que la raison de 2339 ¼ à 153.

Partageons enfin l'angle ΚΕΓ en deux parties égales par la droite ΛΕ ; la raison de ΕΓ à ΛΓ sera plus grande que la raison de 4673 ½ à 153.

Donc, puisque l'angle ΖΕΓ qui est la troisième partie d'un angle droit, a été partagé quatre fois en deux parties égales, l'angle ΛΕΓ sera la quarante-huitième partie d'un angle droit. Construisons au point E un angle ΓΕΜ égal à l'angle ΛΕΓ et prolongeons ΖΓ vers le point M ; l'angle ΛΕΜ sera la vingt-quatrième partie d'un angle droit. Donc la droite ΛΜ est le côté d'un polygone de 96 côtés, circonscrit au cercle.

Donc, puisque nous avons démontré que la raison de ΕΓ à ΓΛ est plus grande que la raison de 4673 ½ à 153, et à cause que ΑΓ est double de ΕΓ, et ΛΜ double de ΓΛ, la raison de ΑΓ à ΛΜ

sera encore plus grande que la raison de 4673 ½ à 153. Donc la raison de la droite ΑΓ au contour d'un polygone de 96 côtés est plus grande que la raison de 4673 ½ à 14688.
Donc la raison du contour de ce polygone à son diamètre est moindre que la raison de 14688 à 4673 ½. Mais parmi ces deux nombres, le premier contient trois fois le second avec un reste qui est de 667 ½, et ce reste est plus petit que la y partie du nombre 4673 ½ ; donc le contour du polygone circonscrit contient le diamètre trois fois, plus une partie de ce diamètre qui est moindre que sa septième partie et demie. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est moindre que le triple du diamètre augmenté d'un septième et demi de ce même diamètre.
Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre. Que l'angle ΒΑΓ soit la troisième partie d'un angle droit; la raison de ΑΒ à ΒΓ sera moindre que la raison de 1351 à 780 ; et la raison de ΑΓ à ΓΒ sera la même que celle de 1560 à 780.

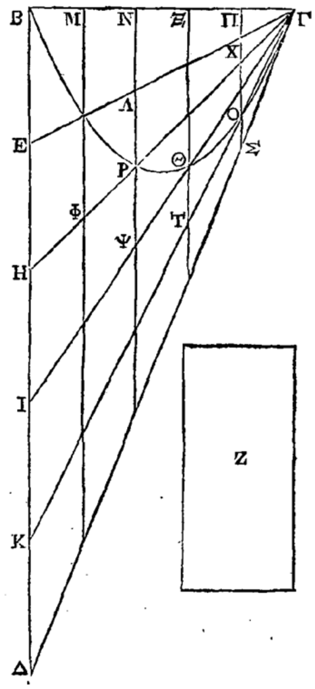
Partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΗ. Puisque l'angle ΒΑΗ est non seulement égal à l'angle ΗΓΒ, mais encore à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ sera égal à l'angle ΗΑΓ. Mais l'angle droit ΑΗΓ est commun; donc le troisième angle ΗΖΓ sera égal au troisième angle ΑΓΗ. Donc les triangles ΑΗΓ, ΓΗΖ sont équiangles; donc ΑΗ est à ΗΓ comme ΓΗ à ΗΖ, et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ comme la somme des droites ΓΑ, ΑΒ est à la droite ΒΓ ; donc la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est à la droite ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Donc la raison de ΑΗ à ΗΓ est moindre que la raison de 2911 à 780, et la raison de ΑΓ à ΓΗ moindre que la raison de 3013 ¾ à 780.
Partageons l'angle ΓΑΗ en deux parties égales par la droite ΑΘ ; la raison de ΑΘ à ΘΓ sera pareillement moindre que la raison de 5924 ¾ à 780, ou bien que la raison de 1823 à 240 ; car ces deux derniers nombres sont chacun les 4/13 des deux premiers. Donc la raison de ΑΓ à ΓΚ est moindre que la raison de 1838 9/11e à 240.
Partageons encore l'angle ΘΑΓ en deux parties égales par la droite ΚΑ ; la raison de ΚΑ à ΚΓ sera moindre que la raison de 3661 9/11e à 240, ou bien que la raison de 1007 à 66; car ces deux derniers nombres sont chacun les 11/40e des deux premiers. Donc la raison de ΑΓ à ΓΛ est moindre que la raison de 1009 1/6 à 66.
Partageons enfin l'angle ΚΑΓ en deux parties égales par la droite ΛΑ ; la raison de ΑΛ à ΛΓ sera moindre que la raison de 2016 1/6 à 66, et la raison de ΑΓ à ΓΛ moindre que la raison de 2017 ¼ à 66.

Donc la raison de ΑΓ à ΓΑ est plus grande que la raison de 66 à 2017 ¼. Donc, la raison du contour du polygone au diamètre est plus grande que la raison de 6336 à 2017 ¼. Mais parmi ces nombres, le premier contient le second trois fois avec un reste qui est plus grand que les 10/71e du second. Donc le contour d'un polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est plus grand que le triple de son diamètre augmenté des 10/71e de ce diamètre. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est plus grande que le triple du diamètre augmenté des 10/71e de ce diamètre.

Donc, la circonférence d'un cercle est égale au triple de son diamètre augmenté d'une portion de son diamètre qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les 10/71e de ce même diamètre.

2. Demonstrations de la quadrature de la parabole

2.1 Première démonstration (d'Archimède) pour la quadrature de la parabole (elle apparaît juste en dessous de la Proposition XVI du traité « De la quadrature de la parabole »)

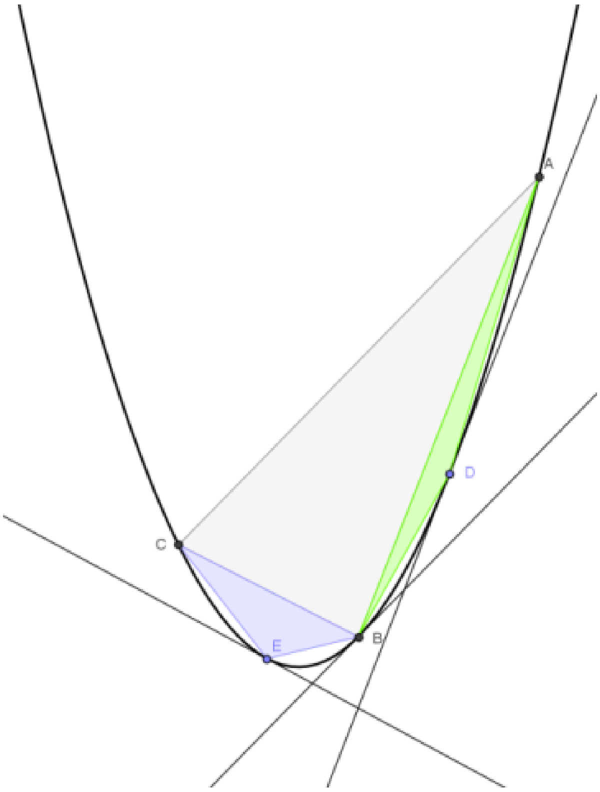


Soit BΘΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du point B conduisons une parallèle au diamètre, et du point Γ une tangente à la parabole au point Γ. Que la surface Z soit la troisième partie du triangle BΔΓ. Je dis que le segment BΘΓ est égal à la surface Z.

Car si le segment BΘΓ n'est pas égal à la surface Z, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus grand, si cela est possible. L'excès du segment BΘΓ sur la surface Z, ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle BΓΔ. Or, il est possible de prendre une surface qui soit plus petite que cet-excès, et qui soit une partie du triangle BΔΓ. Que le triangle BΓE soit plus petit que l'excès dont nous venons de parler, et qu'il soit une partie du triangle BΔΓ. Il est évident que la droite BE sera une même partie de BΔ. C'est pourquoi, partageons BΔ en autant de parties égales que l'excès du segment sur la surface Z a été ajouté de fois à lui-même, et que les points de division soient les points E, H, I, K. Joignons par des droites les points H, I, K avec le point Γ. Ces droites couperont la parabole, puisque la droite ΓΔ touche la parabole au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites MΦ, NΠ, XΘ, ΠO parallèles au diamètre; ces droites seront aussi parallèles à BΔ. Donc puisque le triangle BΓE est plus petit que l'excès du segment BΘΓ sur la surface Z, il est évident que la surface Z et le triangle BΓE, pris ensemble, sont plus petits que le segment BΘΓ. Mais la somme des trapèzes ME, ΦΛ, ΘP, ΘO et du triangle ΓOΣ que la parabole traverse, est égale au triangle BΓE ; parce que le trapèze ME est commun; que le trapèze MΛ est égal au trapèze ΦΛ ; que le trapèze ΛX égal au trapèze ΘΠ ; que le trapèze XX égal au trapèze OΘ et que le triangle ΓXΠ égal au triangle ΓOΣ. Donc la surface Z est plus petite que la somme des trapèzes MΛ, XΠ, ΠΘ et du triangle ΠOΓ (α). Mais le triangle BΔΓ est triple de la surface Z ; donc le triangle BΔΓ est plus petit que le triple de la somme des trapèzes MΛ, PX, ΘΠ et du triangle ΠOΓ. Ce qui ne peut être ; car on a démontré qu'il est plus grand que le triple de cette somme (14). Donc le segment BΘΓ n'est pas plus grand que la surface Z.

Je dis actuellement que le segment BΘΓ n'est pas plus petit que la surface Z. Supposons, s'il est possible, qu'il soit plus petit. L'excès de la surface Z sur le segment BΘΓ ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle BΔΓ. Or, on peut prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du triangle BΔΓ. Θue le triangle BΓE soit plus petit que ces excès ; que ce triangle soit une partie du triangle BΔΓ et que le reste soit comme auparavant. Puisque le triangle BΓE est plus petit que l'excès de la surface Z sur le segment BΘΓ, le triangle BΓE et le segment BΘΓ pris ensemble seront plus petits que la surface Z. Mais la surface Z est plus petite que la somme des trapèzes EM, ΦN, ΨX, ΠT et du triangle ΓΠΣ ; car le triangle BΔΓ est triple de la surface Z, et plus petit que le triple de la somme des trapèzes dont nous venons de parler ; ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition précédente. Donc le triangle BΓE, conjointement avec le segment BΘΓ est plus petit que la somme des trapèzes EM, ΦN, ΨX, ΠT et du triangle ΓHΣ. Donc si l'on retranche le segment commun, le triangle ΓBE sera plus petit que la somme des surfaces restantes. Ce qui est impossible; car on a démontré que le triangle BEΓ est égal à la somme des trapèzes EM, ΦΛ, ΘP, ΘO et du triangle ΓOΣ, laquelle somme est plus grande que la somme des surfaces restantes (β). Donc le segment BΘΓ n'est pas plus petit que la surface Z. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand; donc le segment BΘΓ est égal à la surface Z.

2.2 Deuxième[1] démonstration (d'Archimède) pour la quadrature de la parabole



- ✓ A partir de la corde [AC], il détermine le point B de la parabole où la tangente est parallèle à cette corde.
- ✓ La proposition précédente revient à montrer que l'aire cherchée (entre la parabole et le segment [AC]) vaut 4/3 de celle du triangle ABC (en gris sur la figure ci-contre).
- ✓ Il complète ABC par deux triangles ECD et DAB de mêmes propriétés que ABC (inscrits dans la parabole et ayant un côté parallèle à la tangente en un point).
- ✓ Il montre que l'aire rajoutée ainsi à chaque étape vaut ¼ de l'aire précédente.
- ✓ Il réitère le procédé.

- ✓ L'aire cherchée est donc de la forme $A = Aire_{ABC}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$ (1)

- ✓ Par ailleurs, il a établi que $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots \ldots + \frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ (dans le langage de l'époque : « *lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande* »)

- ✓ Par un double raisonnement par l'absurde (puisqu'il ne connait pas la notion de limite qui nous permettrait aujourd'hui de conclure à partir de (1)), il montre que l'aire A ne peut pas être inférieure à $\frac{4}{3}Aire_{ABC}$, ni supérieure, et donc qu'elle est égale à cette valeur.

[1] Il en donnera trois, une première géométrique (ci-dessus), une « mécanique » (à base de raisonnement sur des poids, poulies et cordes) et une autre géométrique, qui suit faisant appel à ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler une série infinie .

3. Bibliographie

(1) « Mathématiques et mathématiciens » P.Dedron, J Itard éd. MAGNARD

(2) « Une histoire des mathématiques » A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer éd. Points Sciences

(3) Dossier de B.Vitrac sur CultureMath : http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-7.html

(4) Œuvres d'Archimède traduite littéralement par F.Peyrard (1807) : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k210245h/f1.image (ou http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/cercle.htm pour une numérisation de meilleure qualité)

(5) Un exemple d'application de la méthode d'exhaustion : sur le site Chronomath http://serge.mehl.free.fr/anx/exhaustion.html

(6) Conférence de Daniel Perrin à Paris 7 mars 2012 : http://blip.tv/iremparis7/em_perrin-28-03-12-6077779

(7) « Histoires d'aires » groupe « culture scientifique » IREM Orléans 2004-2005.