DIOPHANTE D'ALEXANDRIE
LE PÈRE DE L'ALGÈBRE ?

EMERGENCE

- **Les "Arithmétiques"**

Diophante annonce treize livres dans son introduction ; on en connait six en grecs et récemment quatre en arabe. C'est un recueil de problèmes mathématiques, ordonnés suivant la complexité croissante de leurs solutions. Dans la préface de l'ouvrage, Diophante explique qu'un des buts de son ouvrage est de développer une certaine capacité inventive chez son lecteur, c'est-à-dire une aptitude à trouver des solutions aux problèmes arithmétiques.

Ce n'est pas un ouvrage d'arithmétique théorique au sens des pythagoriciens qui réservaient ce terme à la théorie des nombres[3]. Il se rapporte davantage au courant de la logistique (le calcul chez les grecs) qu'à celui de l'arithmétique euclidienne. Cependant comme les problèmes traités ne comportent que des données et des solutions en nombres rationnels, il s'appuie souvent sur les propriétés spécifiques des entiers[4].
La présentation des problèmes y est toujours abstraite et les données numériques ne sont spécifiées qu'après. *L'énoncé abstrait et général distingue radicalement Diophante des mathématiques babyloniennes*.

C'est un algébriste qui a traduit ces livres en arabe au 10ème siècle, ce qui explique que les arabes ont majoritairement lu Diophante comme un algébriste.

En 1464 Regiomontanus découvre un manuscrit grec *des Arithmétiques* à Venise et le diffuse en Occident.

En 1572 dans l'édition de l'*Algebra* Bombelli incorpore des problèmes de Diophante . En Allemagne, à la même époque (en 1575), Xylander publie une traduction en latin de Diophante.

En 1621 Bachet de Méziriac donne une édition bilingue en grec et en latin des six livres retrouvés. C'est cette édition que lit et annote Fermat.

- **L'écriture syncopée de Diophante**

Diophante est considéré par certains comme le "père de l'algèbre" car notamment il utilise des symboles, mais ce ne sont pour lui que des *formes abrégées* (d'où le qualificatif de syncopé, qui signifie abrégé). C'est le premier pas entre entre l'algèbre rhétorique où tout est exprimé avec des mots et l'algèbre symbolique moderne. Cependant, en algèbre syncopée, le pas n'est pas franchi de considérer les symboles comme des entités mathématiques à part entière. Al-Khwarizmi (IXe siècle), dans son ouvrage fondateur de l'algèbre l'*Abrégé du calcul par la restauration et l'opposition* est entièrement rhétorique : même l'écriture des nombres n'utilise pas de symboles.

Les symboles de Diophante :

L'inconnue (arithme) est notée : ζ, les nombres sont les nombres grecs (lettres de l'alphabet). Le mot $\epsilon\nu\mu o\rho\iota\omega$ ("partie de...") sépare le numérateur du dénominateur d'une fraction polynomiale, le signe $\pitchfork$ pour séparer les monômes négatifs des positifs. Il remplace les mots les plus courants par leurs initiales.
Les symboles pour les monômes sont : les carrés (x^2 : Δ^y), les cubes (x^3 : K^y), les carrés-carrés (x^4 : $\Delta^y\Delta$), les carrés-cubes (ΔK^y), les cubo-cubes (K^yK). La notation des exposants est additive : le carré-cube est un carré multiplié par un cube contrairement à la notation utilisée par les arabes et les algébriste italiens.

Dans l'écriture d'un polynôme, l'addition n'a pas de symbole, c'est seulement une juxtaposition des monômes à coefficients positifs ; il écrit ensuite le séparateur M suivi de la constante ; puis il écrit le symbole $\pitchfork$ suivi des monômes à coefficients négatifs.
Exemple : $K^y\beta M\eta \pitchfork \Delta^y\alpha\zeta\beta$ représente le polynôme $2x^3 - x^2 - 2x + 8$

- **Exemples de problèmes des "Arithmétiques"**

PROBLÈME 5 DU LIVRE V : *Trouver deux nombres, l'un un cube et l'autre un carré, tel que si on multiplie le cube du cube par deux nombres donnés et on ajoute à chacun de ces produits le carré du carré, le résultat est dans chaque cas un nombre carré.*
En notation moderne : trouver, x, y, z tels que $(x^2)^2 + a(y^3)^3 = u^2$ et $(x^2)^2 + b(y^3)^3 = v^2$

PROBLÈME 16 DU LIVRE I : *Trouver trois nombres qui, pris deux à deux, forment des nombres proposés.*
En notation moderne : trouver, x, y, z tels que :$x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$

Diophante choisit $a = 20$ unités, $b = 30$ unités et $c = 40$ unités. Ensuite, il dit :

Texte de Diophante	En algèbre moderne
« *Posons que la somme des trois nombres est $\zeta\alpha$ (1 arithme).*	Notons A la somme des trois nombres
Dès lors, puisque le premier nombre plus le second forment M_κ (20 unités), si nous retranchons M_κ, (20 unités) de ζ (1 arithme), nous aurons comme troisième nombre : $\zeta\alpha \pitchfork M_\kappa$ (1 arithme moins 20 unités).	$z = A - 20$
Pour la même raison, le premier nombre sera : $\zeta\alpha \pitchfork M_\lambda$ (1 arithme moins 30 unités)	$x = A - 30$
et le second nombre sera : $\zeta\alpha \pitchfork M_\mu$ (1 arithme moins 40 unités).	$y = A - 40$
Il faut encore que la somme des trois nombres devienne égale à $\zeta\alpha$ (1 arithme).	$x + y + z = A$
Mais la somme des trois nombres forme $\zeta\gamma \pitchfork M_q$ (3 arithmes moins 90 unités).	Donc $3A - 90 = A$
Égalons-les à $\zeta\alpha$ (1 arithme) et l'arithme devient $M_{\mu\epsilon}$ (45 unités).	et on obtient $A = 45$.
Revenons à ce qui a été posé : le premier nombre sera $M_\iota\epsilon$ (15 unités), le second sera M_ϵ (5 unités) et le troisième sera $M_{\kappa\epsilon}$ (25 unités).	$x = 15$; $y = 5$; $z = 25$
et la preuve est claire. »	cqfd

Problème 20 du livre IV "*Trouver quatre nombres de telle manière que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'une unité, forme un carré*".
En notation moderne : trouver, x, y, z, t tels que $xy + 1 = a^2$, ...

L'approche de Diophante est algorithmique sans interprétation géométrique sous-jacente à son raisonnement. Il utilise le problème précédent relatif à trois nombres. Il transforme les conditions imposées pour se ramener, après *restauration et opposition,* à une égalité simple. Vous pouvez lire ce qu'il en dit en annexe. La fin de cette citation suggère que Diophante voulait exposer les algorithmes de résolution de ce que nous appelons "équation du second degré" ou du moins des trois formes canoniques énumérées par les algébristes arabes.

Problème 28 du livre IV : *"Trouver deux nombres de telle manière que leur produit, augmenté ou diminué de leur somme, forme un cube ".*
En notation moderne : trouver, x, y tels que $xy + (x + y) = a^3$, $xy - (x + y) = b^3$

Méthode : Diophante pratique une démarche de type analytique. Il propose une première instanciation qui ne fonctionne vraiment pas. Il parvient à la "bonne" solution, seulement à l'issue de la résolution d'un problème auxiliaire. Ses explications ont un but pédagogique et l'ambition (légitime) de montrer qu'il ne trouve pas les solutions "par hasard", mais d'une manière particulièrement habile.

Diophante, père de l'algèbre ?

Nous allons alimenter le débat par des reflexions tirées de l'article de Bernard Vitrac[1] : *Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ?*

Les exemples cités ci-dessus montrent que les solutions proposées par Diophante ne sont pas le fait d'un simple bricolage empirique, mais qu'il maîtrise un certain nombre de méthodes. Ceci a manifestement conduit un certain nombre de savants à croire que Diophante était l'"inventeur" de l'algèbre.

Diophante est le premier mathématicien grec connu à utiliser le substantif "égalité" ($\iota\sigma o\tau\eta\zeta$, $\iota\sigma\omega\sigma\iota\zeta$), en donnant aux égalités ou "équations" en quelque sorte le statut d'un "objet" mathématique. Les transformations successives des égalités qu'il utilise dans les procédures mettent en jeu deux manipulations qu'il est bien légitime de rapprocher de la restauration et de l'opposition (al-gabr wa-l-muqâbala) des algébristes arabes. Les mots arabes "gabr" et "muqâbala" sont des substantifs désignant des manipulations en dehors des mathématiques, mais dont le sens algébrique relatif aux deux membres d'une équation se fixe vite (informations d'Ahmed Djebbar).

L'existence du système d'abréviations (non maintenues dans la traduction des Livres conservés seulement en arabe) introduit par Diophante dans sa préface conduit certains commentateurs (dont les savants arabes) à soutenir la thèse que les *Arithmétiques* appartiennent à l'algèbre. Leur existence dans le texte grec ne saurait constituer un critère suffisant pour affirmer qu'il s'agit d'algèbre. La question des opérations de restauration et d'opposition (al-gabr wal- muqâbala) pourrait sembler davantage décisive.

Il est donc un peu rapide de considérer Diophante comme précurseur d'al-Khwârizmî ; passer de l'algorithmique à l'algèbre supposait non seulement de justifier les procédures de calcul, mais aussi de dépasser le clivage "nombres versus grandeurs" pour constituer un domaine propre, situé en amont de l'arithmétique et de la géométrie. Il n'a pas manqué grand chose à Diophante pour y parvenir. Comment l'expliquer alors qu'il en était si proche ? [1]

ANNEXE

Texte de Diophante sur *la restauration et l'opposition (al-gabr wa-l-muqâbala)* des algébristes arabes.

« Après t'avoir expliqué les multiplications, les divisions des susdites espèces sont claires. Il est donc utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à la composition et au retranchement, et aussi à la multiplication des espèces, ainsi qu'à la manière d'ajouter des espèces existantes et manquantes nonsemblables en multitude à d'autres espèces, lesquelles sont elles-mêmes existantes, ou semblablement existantes et manquantes ; enfin à la manière de retrancher d'espèces existantes et d'autres, manquantes, d'autres espèces, soit existantes, soit semblablement aussi existantes et manquantes. »

Après cela, s'il résulte d'un certain problème que certaines espèces sont égales à des mêmes espèces, mais non semblables en multitude, il faudra retrancher de chaque côté les semblables des semblables jusqu'à ce que l'on obtienne une seule espèce égale à une seule espèce. Et si dans l'une quelconque des expressions, ou bien dans chacune d'entre elles, se trouvent des espèces manquantes, il faudra ajouter ces espèces manquantes de part et d'autre jusqu'à ce que les espèces de chaque côté deviennent existantes, et, de nouveau, retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce qu'une espèce et une seule subsiste de chaque côté.

Applique cela avec adresse aux expressions des propositions, autant que cela est possible, jusqu'à ce qu'il subsiste une seule espèce égale à une seule espèce.Je te montrerai plus tard comment l'on résout le cas où il reste deux expressions égales à une seule. »

Références

[1] Bernard Vitrac [2005] *Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ?* Āyene-ye Mirās (Mirror of Heritage, New Series) 3 (28) : -44. (Tehran, Iran). Librement téléchargeable en ligne sur le site HAL du CNRS http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/17/49/33/PDF/Algebre_grecque_Ayene_Miras.pdf

[2] Luis Radford : *Diophante et l'Algèbre pré-symbolique*, Revue canadienne "Bulletin AMQ" (déc 1991 - mars 1992) et IREM de Strasbourg

[3] Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer. [1982] Histoires des mathématiques, *Routes et dédales*. Collection AXES, Etudes vivantes. Paris-Montréal

[4] F. Laroche [2006] *Petite histoire des mathématiques*, http ://promenadesmaths.free.fr