CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

REPRESENTER

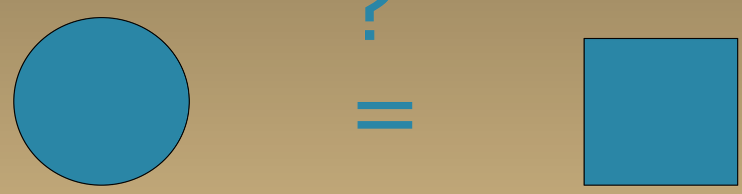
LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ GRECQUE

De l'antiquité grecque au XIXe siècle, ces problèmes ont passionné les mathématiciens

Codex Vindobonensis 2554 (vers 1250), Österreichische Nationalbibliothek.

Quadrature du cercle :

construire, à la règle et au compas, un carré de surface égale à celle d'un disque donné.



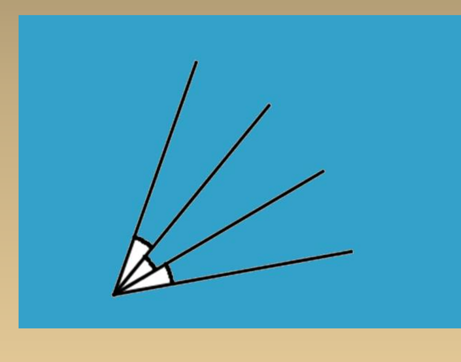
Le problème revient à calculer : π

Tant que les grecs chercheront une fraction égale au rapport de la circonférence au diamètre du cercle, la quadrature leur semblera possible. Leurs résultats n'étaient que de bonnes approximations de π.

C'est l'un des problèmes qui conduira à l'émergence de la notion de nombre irrationnel.

Trisection d'un angle :

diviser, à la règle et au compas, un angle donné en trois parties égales



Pourquoi la règle et le compas seuls ?

Les géomètres grecs choisissent les objets les plus simples en vue de la formalisation de la géométrie : la droite et le cercle (*la figure la plus parfaite selon Proclus*).

Ils recherchent les constructions géométriques obtenues par intersections de droites et de cercles, sans utiliser la notion de mesure.

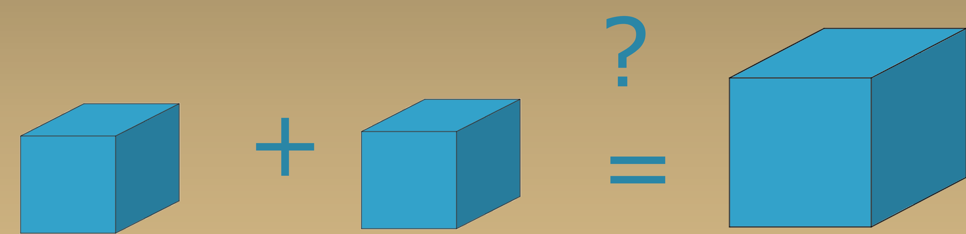
Dans *Les Éléments* (fondement des mathématiques), les deux premières assertions qu'Euclide pose dans le livre I sont la possibilité de tracer une ligne droite d'un point à un autre, et celle de tracer un cercle de centre et de rayon donnés.

La géométrie peut-elle sauver les habitants de Delos de la peste ?

Pour éradiquer l'épidémie de peste, l'oracle de Delphes demande de doubler l'autel consacré à Apollon, autel en forme de cube parfait.

Duplication du cube :

construire, à la règle et au compas, un cube de volume double d'un cube donné



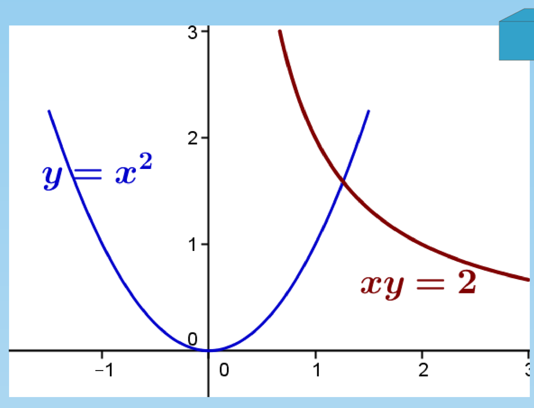
Le problème revient à construire : $\sqrt[3]{2}$

Ce problème conduira à la résolution des équations de degré 3 par J. Cardan début XVI^e.

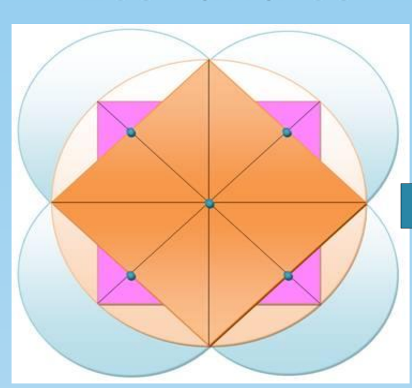
Et si on essayait avec d'autres outils ?

DES COURBES

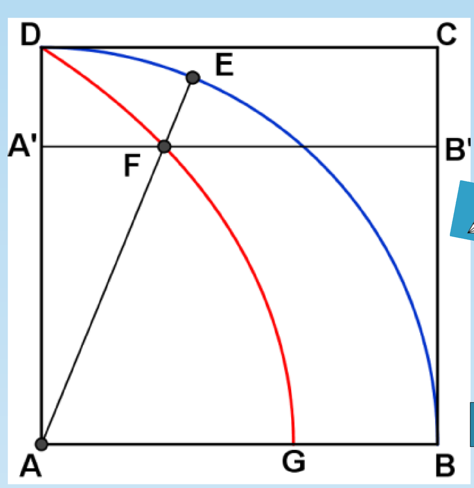
MENECHME
Les Coniques



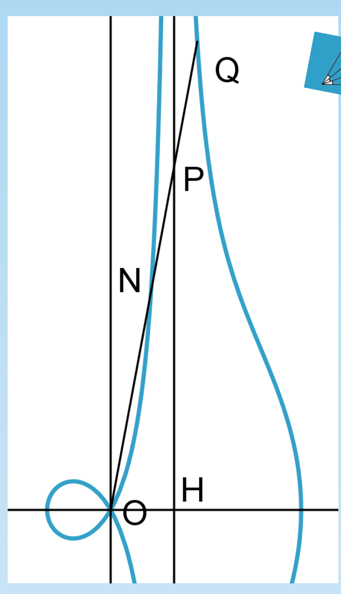
HIPPOCRATE DE CHIOS
Les lunules



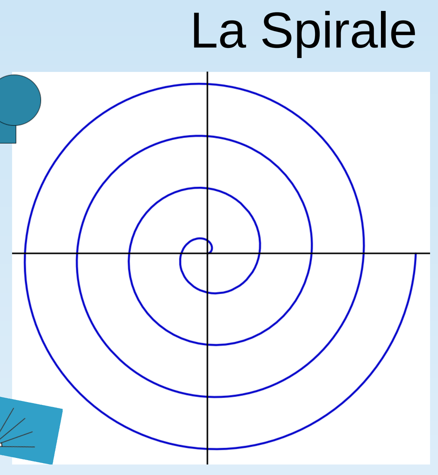
HIPPIAS d'ELIS
La Quadratrice dite de Dinostrate



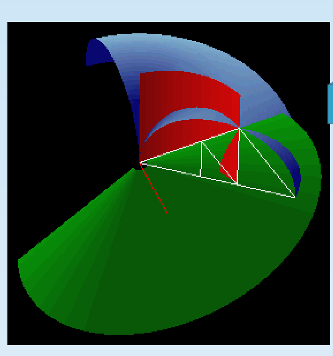
NICOMEDE
La Conchoïde



ARCHIMEDE et Eutocios d'Ascalon
La Spirale

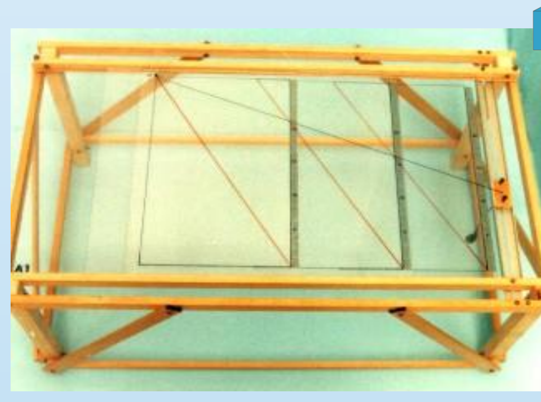


ARCHYTAS de TARENTE
Une solution en 3D

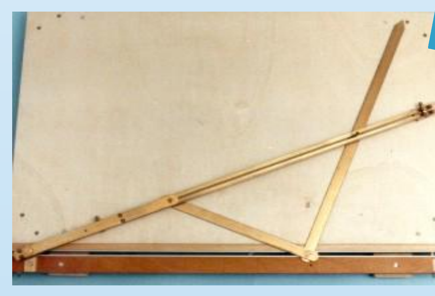


DES INSTRUMENTS

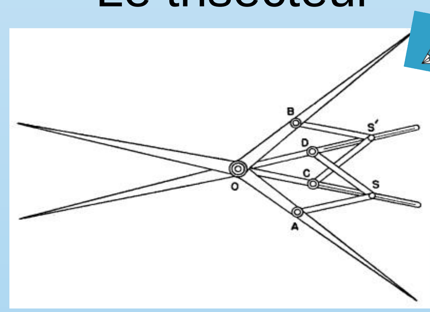
ERATHOSTENE
Le mésolabe



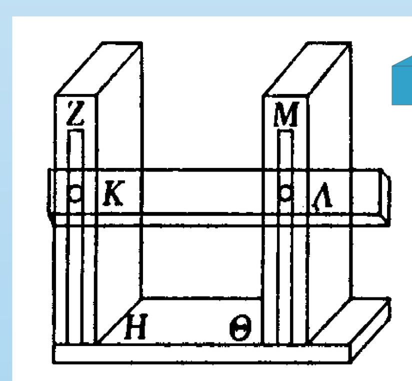
ARCHIMEDE
La règle avec deux graduations



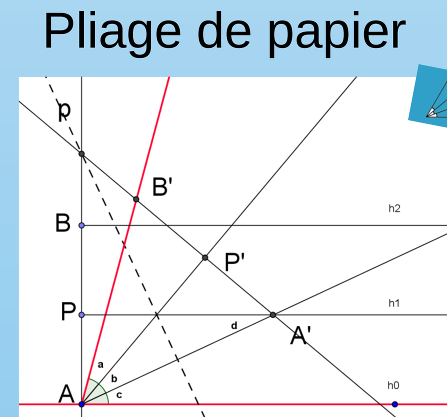
LAISANT
Le trisecteur

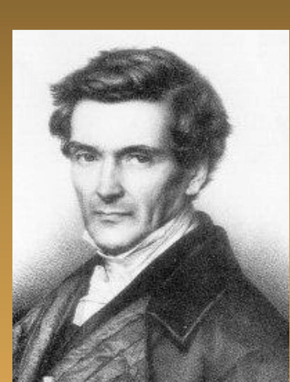


La machine de
PLATON

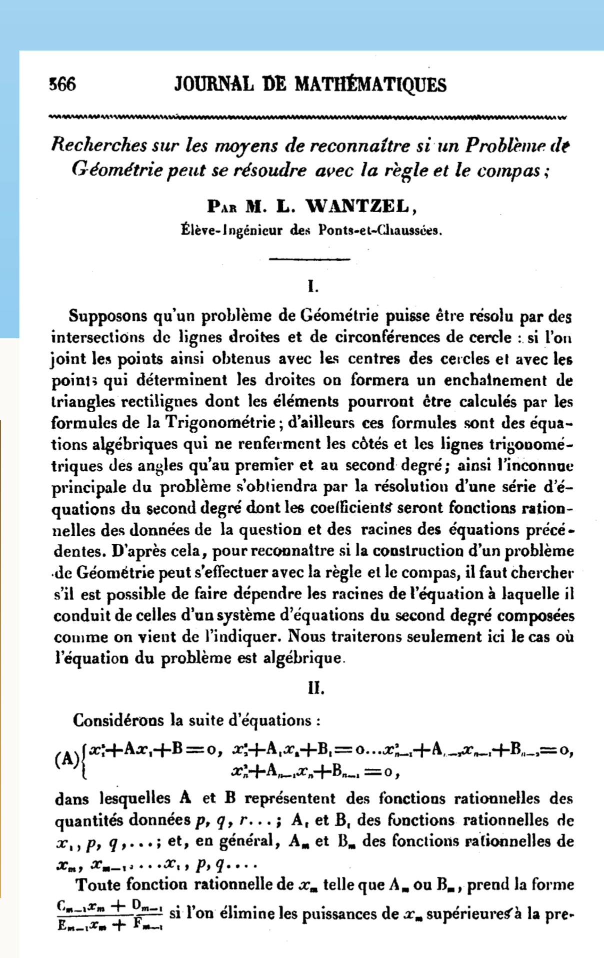


ABE, 1980
Pliage de papier





Pierre-Laurent WANTZEL démontre en 1837 que ces trois problèmes ne sont pas constructibles avec la règle et le compas seuls. De plus Ferdinand von LINDEMANN montra la transcendance de π en 1882.



566 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

I.

Supposons qu'un problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie ; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré ; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici le cas où l'équation du problème est algébrique.

II.

Considérons la suite d'équations :

$$\text{(A)}\begin{cases} x_1^2 + Ax_1 + B = 0, \quad x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0 \ldots x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0, \\ x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles A et B représentent des fonctions rationnelles des quantités données $p, q, r \ldots$; A_1 et B_1 des fonctions rationnelles de $x_1, p, q, \ldots$; et, en général, A_m et B_m des fonctions rationnelles de $x_m, x_{m-1}, \ldots x_1, p, q \ldots$.

Toute fonction rationnelle de x_m telle que A_m ou B_m, prend la forme $\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$ si l'on élimine les puissances de x_m supérieures à la pre-

IREM Aix-Marseille

http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013