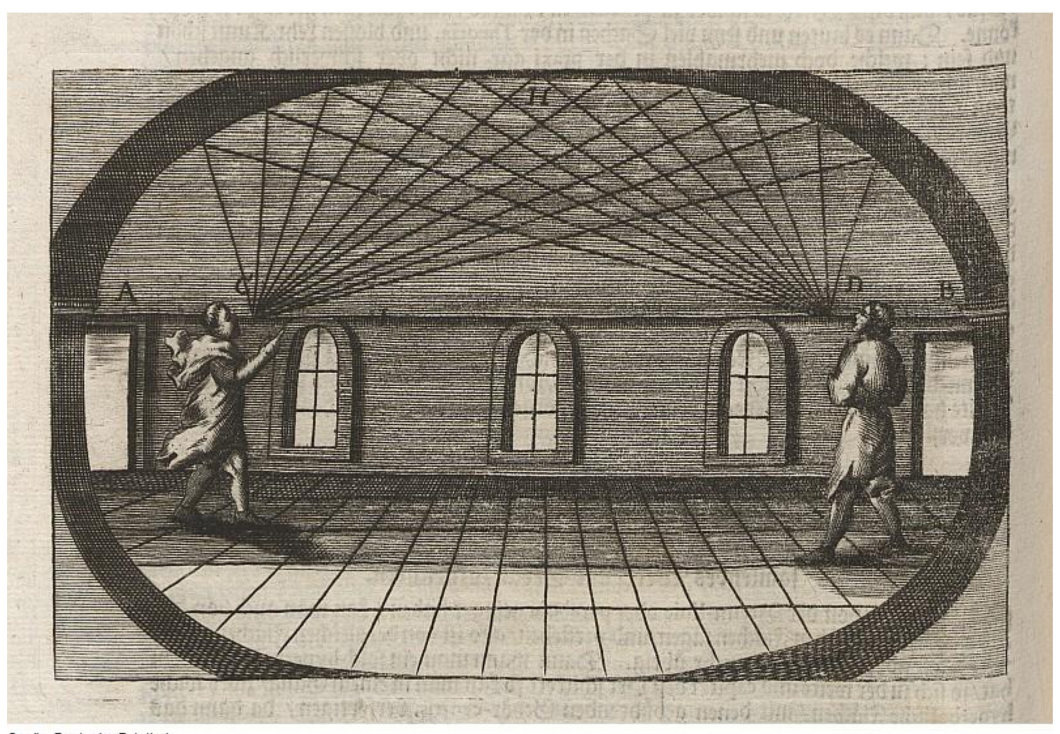
REPRESENTER

DE L'ANTIQUITE A NOS JOURS

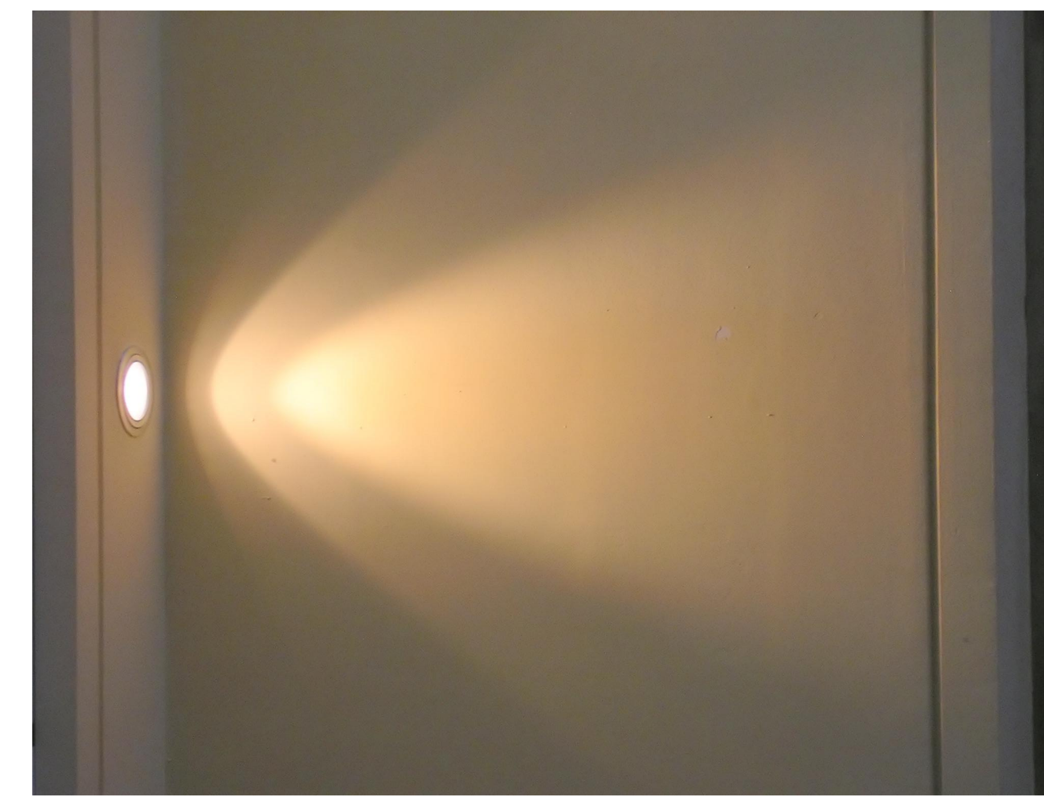
L'AVENTURE DES CONIQUES



Quelle: Deutsche Fotothek

Chambre d'écho utilisant une propriété géométrique de l'ellipse

Miroir parabolique du four solaire de Mont-Louis

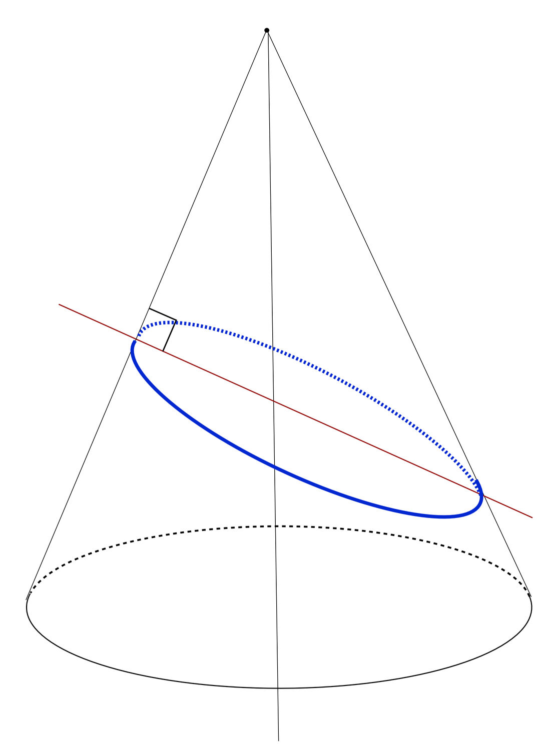


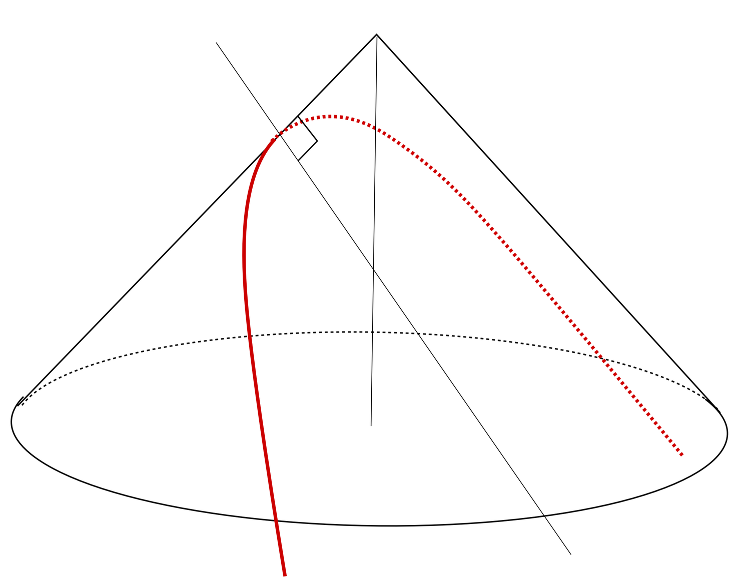
Trace hyperbolique sur un plan du cône de lumière d'une lampe

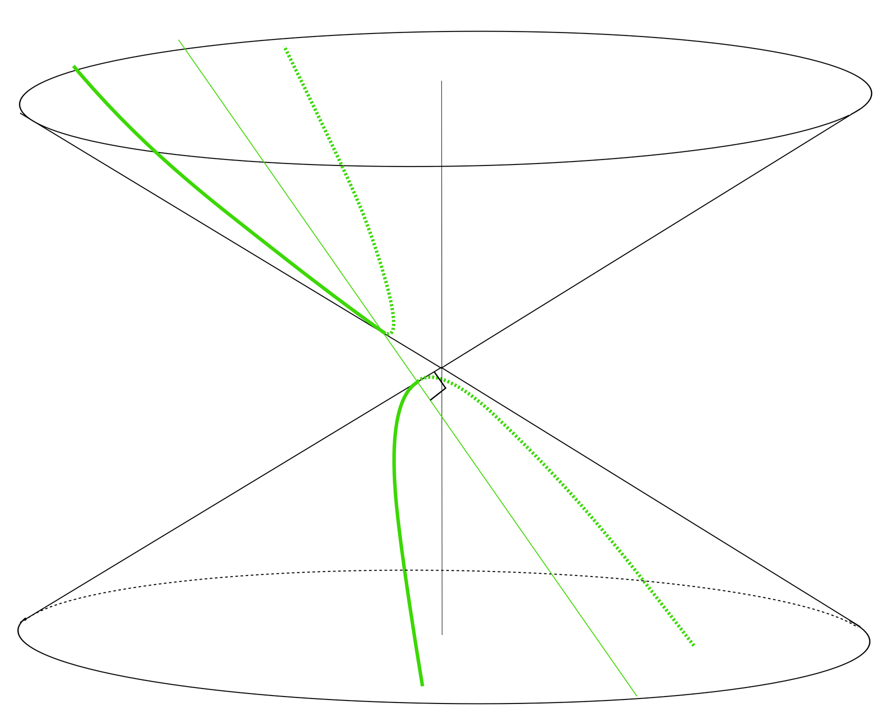
La première trace écrite sur les intersections de cônes et de plans se trouve dans un document de **Ménechme** (-380 ; -320). Il propose une résolution du problème de la duplication du cube, encore appelé problème de Délos. N'ayant pu en obtenir la résolution, à la règle et au compas, il propose d'utiliser l'intersection de deux coniques pour obtenir la résolution d'un problème plus général : l'insertion de deux moyennes géométriques entre deux grandeurs données.

Cône coupé par un plan perpendiculaire à une génératrice

Pour **Menechme** une conique est définie comme l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire à l'une de ses génératrices.
La **parabole** correspond au cas particulier d'un cône d'angle au sommet droit (le plan de section est parallèle à une génératrice).
Les **hyperboles** correspondent à des cônes d'angles obtus
Les **ellipses** correspondent à des cônes d'angles aigus.
Pour Ménechme les équations qui caractérisent les coniques étaient remplacées par des égalités d'aires.

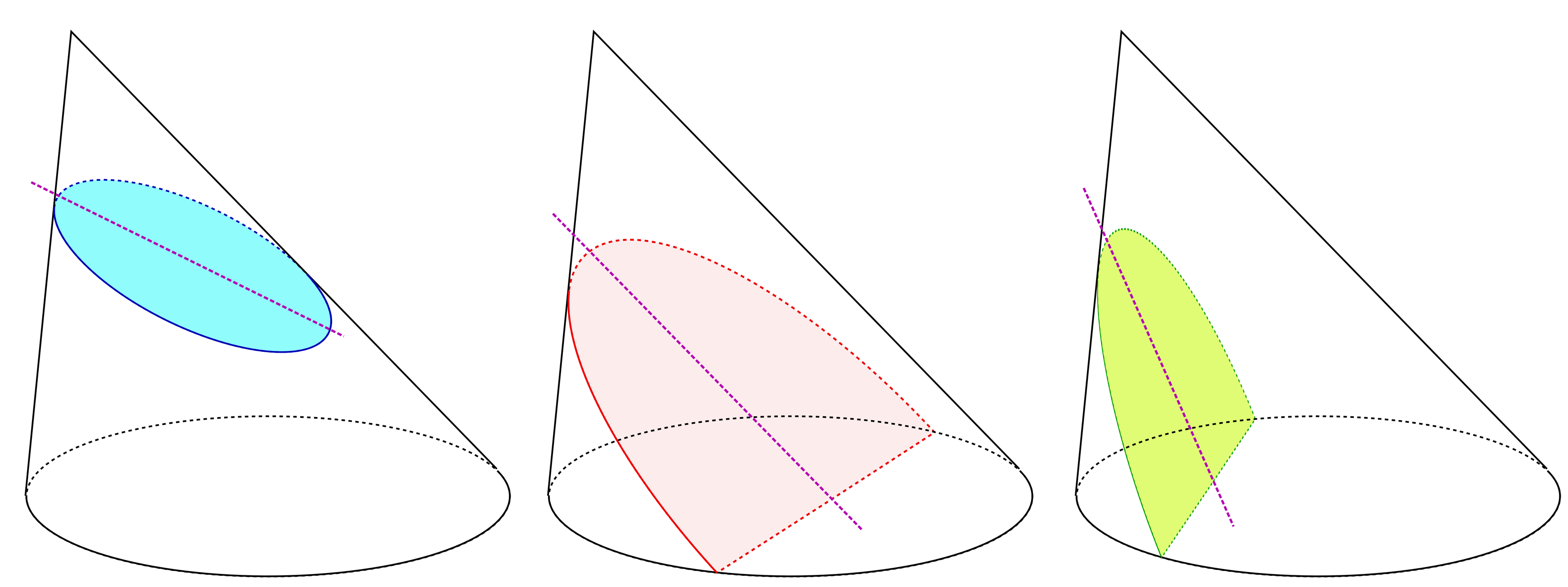






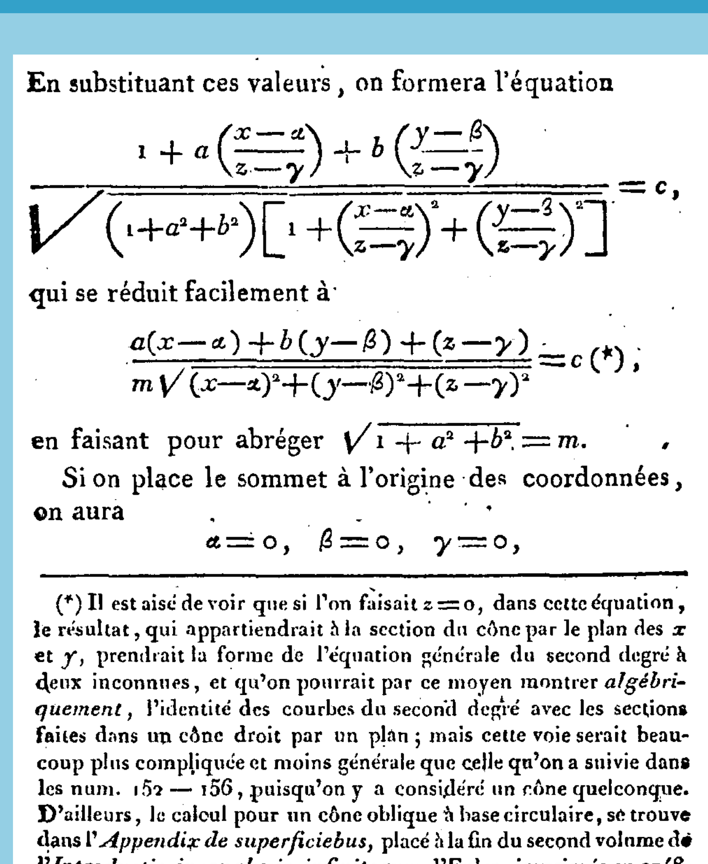
Cône quelconque coupé par un plan

Pour **Ménechme**, comme pour **Apollonius**, une parabole est une section d'un cône (droit) par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône. La différence entre les deux conceptions provient de l'angle au sommet du cône ; celui-ci est droit pour Ménechme et quelconque pour Apollonius. Dans la conception de Ménechme, les paraboles correspondent à des cônes d'angle droit, les ellipses aux angles aigües, les hyperboles aux angles obtus. Pour Apollonius, le cône est fixe et c'est l'angle d'inclinaison du plan de section par rapport à l'axe du cône qui différentie les sections. La **parabole** est obtenue pour un angle égal au demi-angle du cône, l'**ellipse** pour un angle plus grand et l'**hyperbole** pour un angle plus petit.



ellipse | parabole | hyperbole

Equation d'un cône
Les coniques sont obtenues pour z=0



En substituant ces valeurs, on formera l'équation

$$\frac{1+a\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+b\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)^2\right]}}=c,$$

qui se réduit facilement à

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\beta)+(z-\gamma)}{m\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}=c\ (*),$$

en faisant pour abréger $\sqrt{1+a^2+b^2}=m$.

Si on place le sommet à l'origine des coordonnées, on aura

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,$$

(*) Il est aisé de voir que si l'on faisait $z=0$, dans cette équation, le résultat, qui appartiendrait à la section du cône par le plan des x et y, prendrait la forme de l'équation générale du second degré à deux inconnues, et qu'on pourrait par ce moyen montrer *algébriquement*, l'identité des courbes du second degré avec les sections faites dans un cône droit par un plan ; mais cette voie serait beaucoup plus compliquée et moins générale que celle qu'on a suivie dans les num. 152 — 156, puisqu'on y a considéré un cône quelconque. D'ailleurs, le calcul pour un cône oblique à base circulaire, se trouve dans l'*Appendix de superficiebus*, placé à la fin du second volume de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, imprimée en 1748.

Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique
S.Lacroix, 1807.

Solution graphique de Menechme pour la duplication du cube

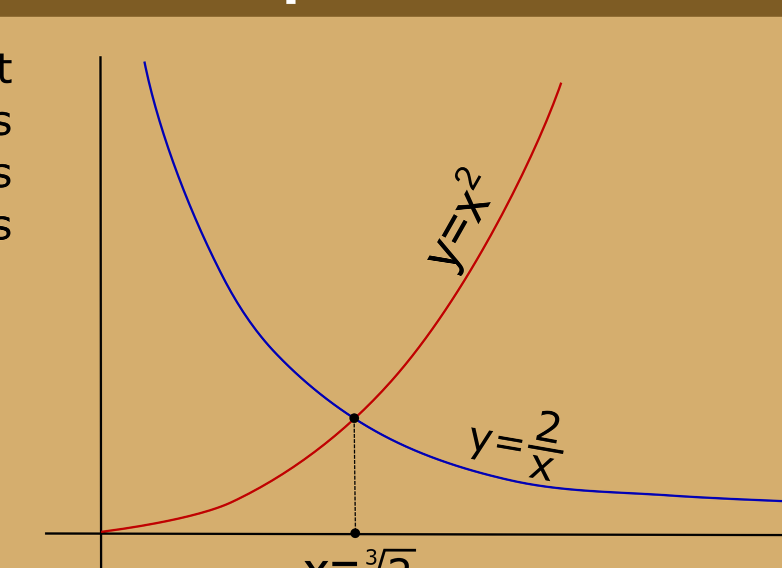
Deux grandeurs a et b de même nature étant données il s'agit de trouver deux autres grandeurs x et y, de même nature que les précédentes, telles que x et y soient deux moyennes proportionnelles entre a et b.
Ces conditions se traduisent en langage moderne par

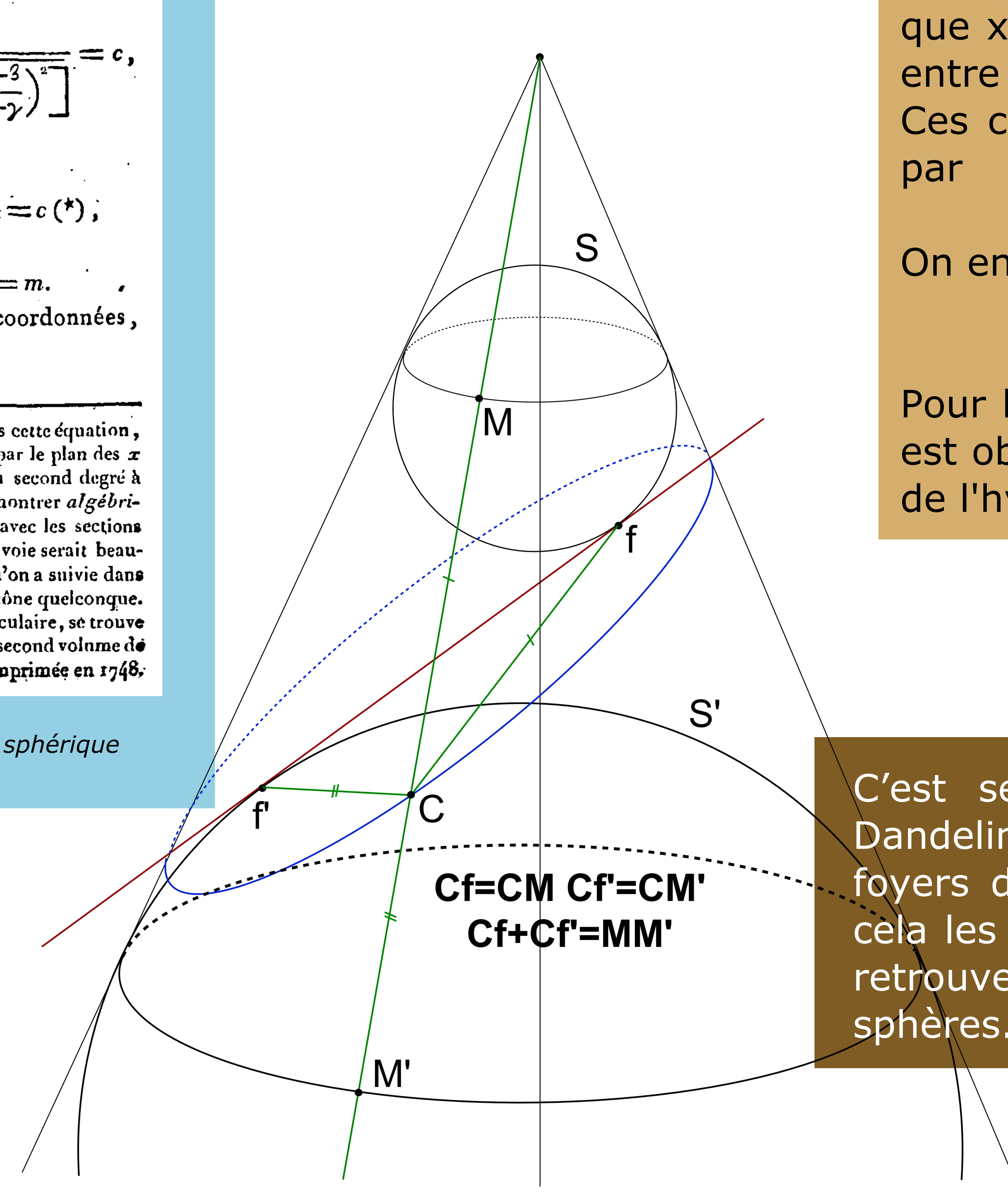
$$a/x=x/y=y/b$$

On en déduit que

$$x^3=a^2b \quad y=x^2/a \quad xy=ab$$

Pour le problème de Delos a=1 et b=2. La solution est obtenue par intersection de la parabole $y=x^2$ et de l'hyperbole équilatère y=2/x.





C'est seulement au XIXe siècle, que deux mathématiciens belges, Dandelin et Quetelet, montrèrent l'équivalence entre la définition par foyers d'une conique et les sections planes d'un cône. On utilise pour cela les sphères tangentes à la fois au cône et au plan. Pour l'ellipse on retrouve la définition dite "du jardinier" en tracant les tangentes aux sphères.

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013