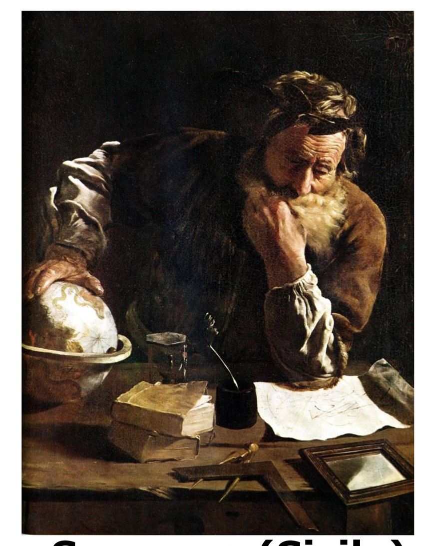
MESURER

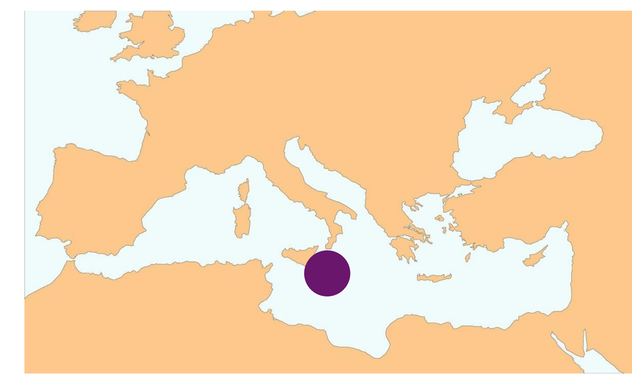
AUX ORIGINES DU CALCUL INTÉGRAL

ARCHIMÈDE



Syracuse (Sicile)

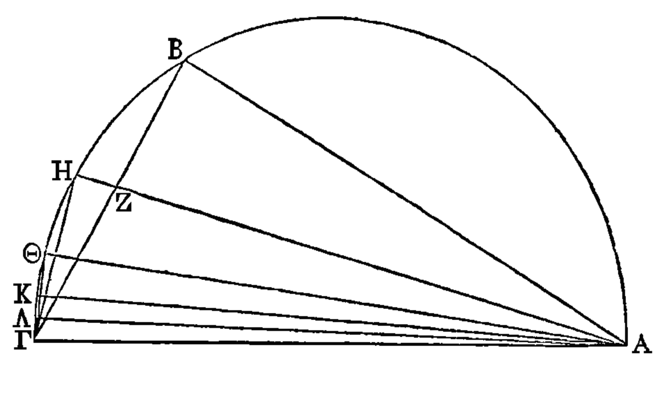
env -287 à -212 av J.C.



GÉNÉRALEMENT CONSIDÉRÉ, AVEC EUCLIDE, COMME LE PLUS GRAND MATHÉMATICIEN DE L'ANTIQUITÉ, SES MÉTHODES PRÉFIGURENT CELLES DU CALCUL INTÉGRAL QUE NEWTON ET LEIBNIZ DÉVELOPPERONT AU XVII^{È} SIÈCLE ET QUI ONT PERMIS D'ÉNORMES AVANCÉES DANS LES MATHÉMATIQUES ET LEURS APPLICATIONS.

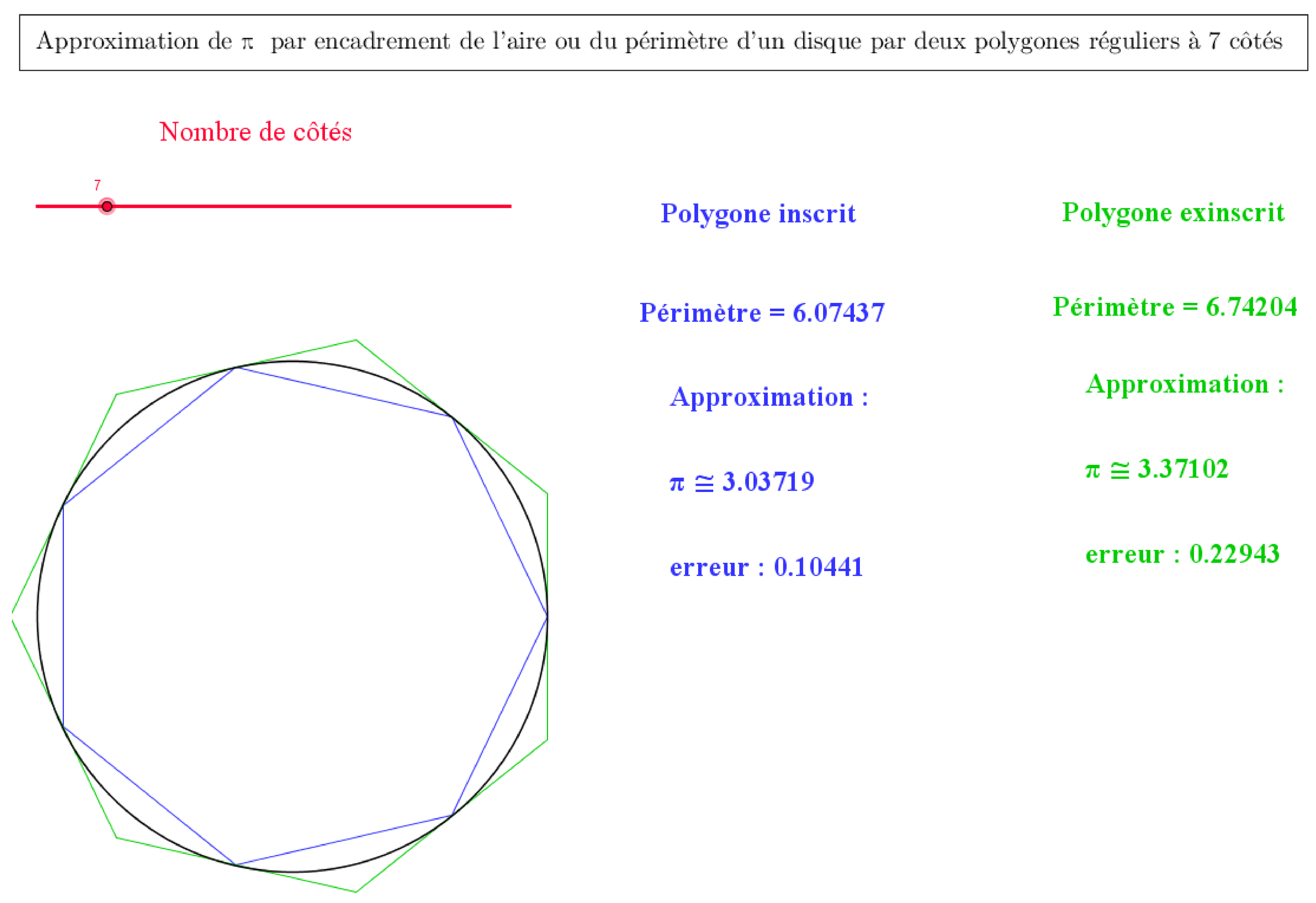
MESURE DE π

Proposition III du traité « De la mesure du cercle »:



"La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les 10/71^{e} de ce même diamètre"

Archimède invente, vers 250 avant J.C. , la méthode suivante pour calculer la longueur du périmètre d'un cercle : il encadre cette valeur par le périmètre d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle, et par le périmètre d'un polygone régulier exinscrit.



En utilisant un polygone à 96 côtés (il part d'un hexagone et multiplie quatre fois par deux le nombre de sommets), Archimède parvient à l'encadrement :

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}}$$ **(amplitude 0,002)**

L'usage de la lettre grecque π (le p de périmètre) ne date que du XVIII^{è} siècle !

La méthode d'exhaustion, ébauchée par Eudoxe et formalisée par Euclide, est appliquée par Archimède dans plusieurs problèmes de calcul de longueurs, d'aires et de volumes.

Vis d'Archimède

Ses travaux concernent aussi l'arithmétique, la géométrie, mais aussi la mécanique (vis sans fin, leviers), l'hydrostatique (« tout corps plongé dans un liquide …. »), etc… .

« Euréka »

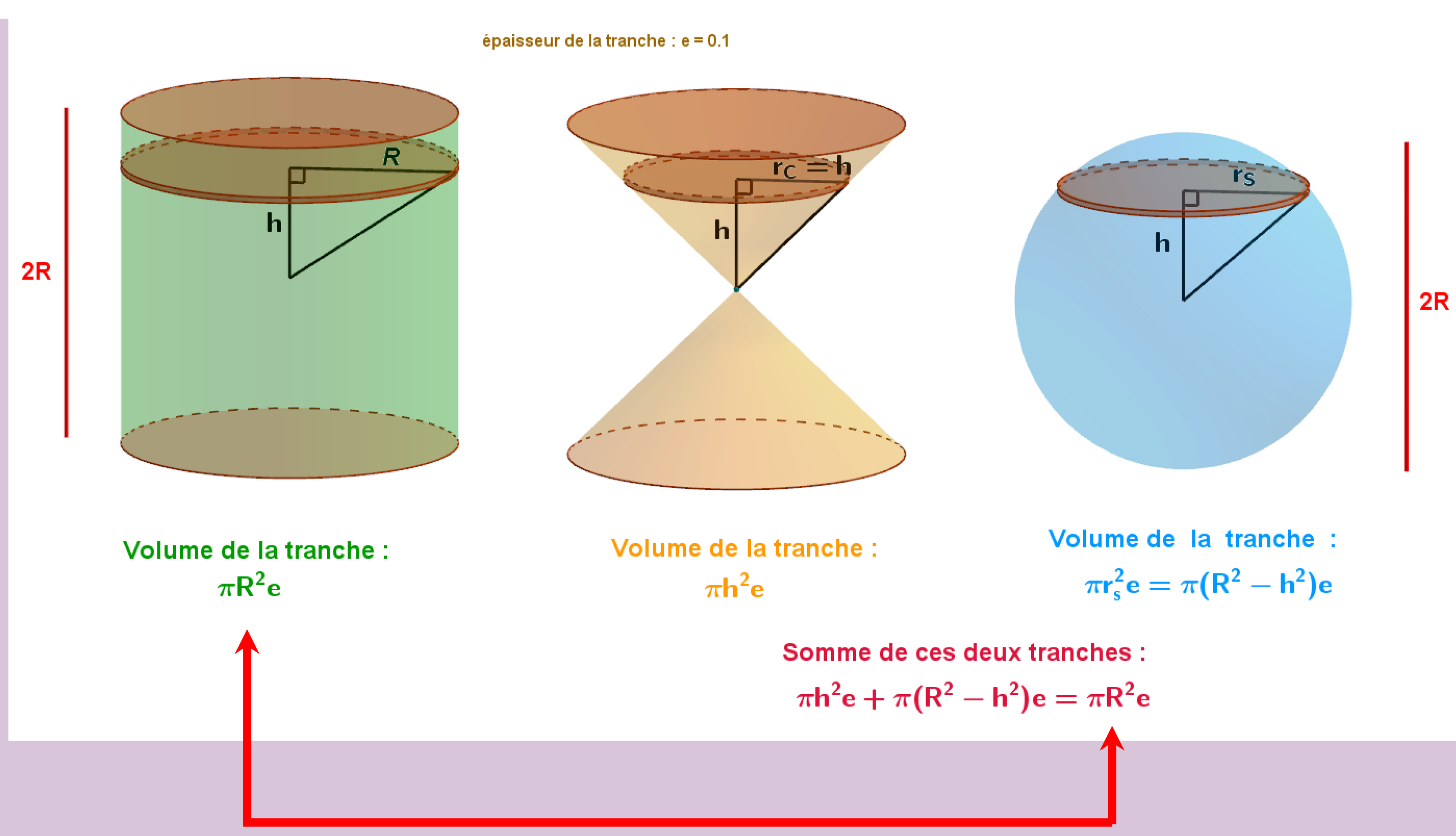
VOLUME DE LA SPHÈRE

Archimède montre que le volume du cylindre à gauche (de hauteur 2R) est la somme de celui de la sphère et du cône droit.

- ✓ **Chaque volume est découpé en fines tranches horizontales d'épaisseur e.**
- ✓ **Cette valeur e peut être aussi petite qu'on veut et le volume total est la somme de ces tranches.**

On a en permanence (quel que soit h) : $R^2 = h^2 + r_S{}^2$, donc on en déduit, pour chaque tranche :

$$T_{cylindre} = T_{sablier} + T_{sphère}$$ **et donc pour le volume entier**

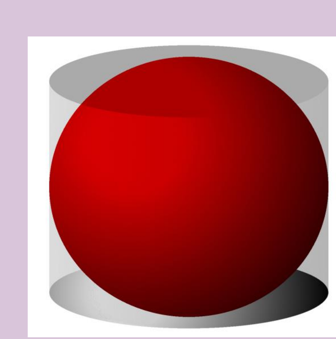


$$V_{cylindre} = V_{sablier} + V_{sphère}$$

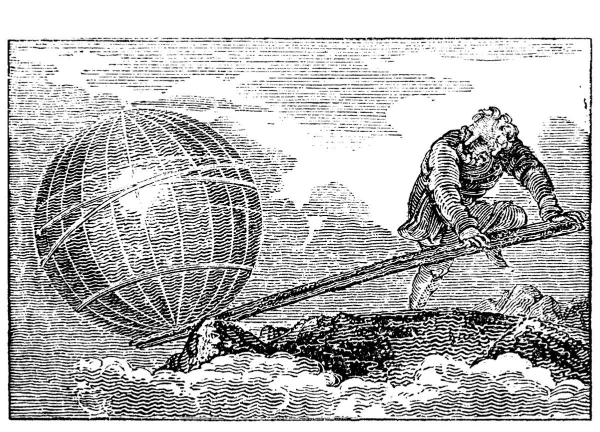
Comme il sait que le sablier a un volume égal à 1/3 de celui du cylindre, il en déduit que :

$$V_{sphère} = \frac{2}{3}V_{cylindre} = \frac{2}{3}2\pi R^3, \text{ soit : } \boxed{V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Archimède est si fier de cette découverte qu'il aurait donné des instructions pour que sa tombe soit gravée d'une sphère inscrite dans un cylindre



« Donnez moi un point d'appui et un levier et je soulèverai le Monde »



Malgré (ou à cause) de la grande originalité de ses travaux, Archimède sera peu suivi dans le monde grec et il faudra attendre le IX^{è} siècle pour que les arabes (et notamment Ibn Qurra) traduisent ses traités et exploitent ses méthodes.

IREM Aix-Marseille

http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013