EMERGENCE

UN TEXTE FONDATEUR DES MATHEMATIQUES

LES ELEMENTS D'EUCLIDE

Ouvrage de recherche ou ouvrage pédagogique ?

<u>Les *Éléments*</u> (*stoichéïa*) sont constitués de treize livres (deux autres livres sont aussi attribués à Euclide) présentant des connaissances élémentaires au sens qu'elles servent de base à nombreuses démonstrations .
Partant de définitions , d'axiomes et de cinq postulats, Euclide y énonce des propositions traitant de tous les domaines mathématiques connus à l'époque. Il enchaîne les démonstrations dans un ordre suivant rigoureusement les règles de la logique.

Architecture et quelques contenus des 13 volumes

Exemple : Pour énoncer et démontrer les propositions du livre IV, il faut connaître celles des livres I, II et III

GEOMÉTRIE

LIVRE I

- **Définition des notions de point, de ligne, de segment.**
- **Énoncé des cinq postulats et des axiomes.**
- **Une démonstration du fameux théorème de Pythagore (Prop. I-47 et I-48).**

LIVRE II

Démonstration des identités remarquables par la géométrie. Les nombres y sont associés à des grandeurs (longueurs, aires, volumes). Ainsi l'aire d'un rectangle de côtés *a* et *b* représente le produit *ab*.

LIVRE III

Étude de la géométrie du cercle

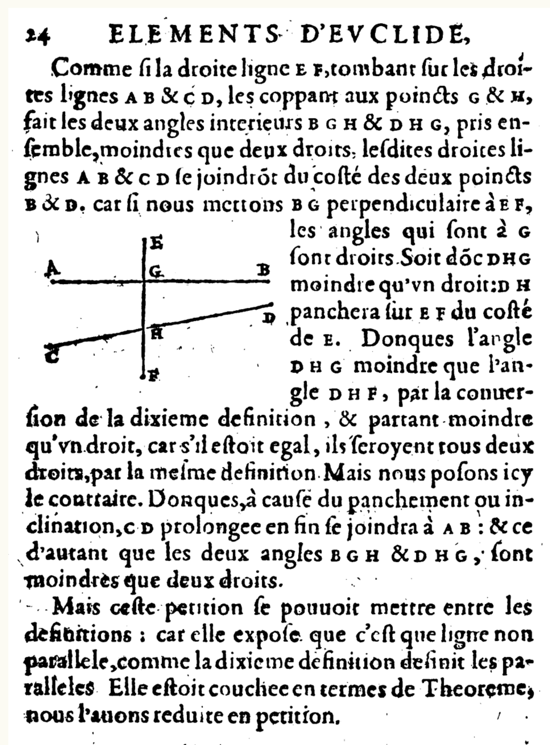
LIVRE IV

Étude des polygones (leurs constructions à la règle et au compas, leur inscription dans un cercle).

LIVRE VI

Application de la théorie des proportions du livre V aux grandeurs de la géométrie plane. On y trouve le célèbre théorème de Thalès (Prop. VI 2)

Texte et preuve de la prop. I-47. Codex Vaticanus



24 ELEMENTS D'EVCLIDE,

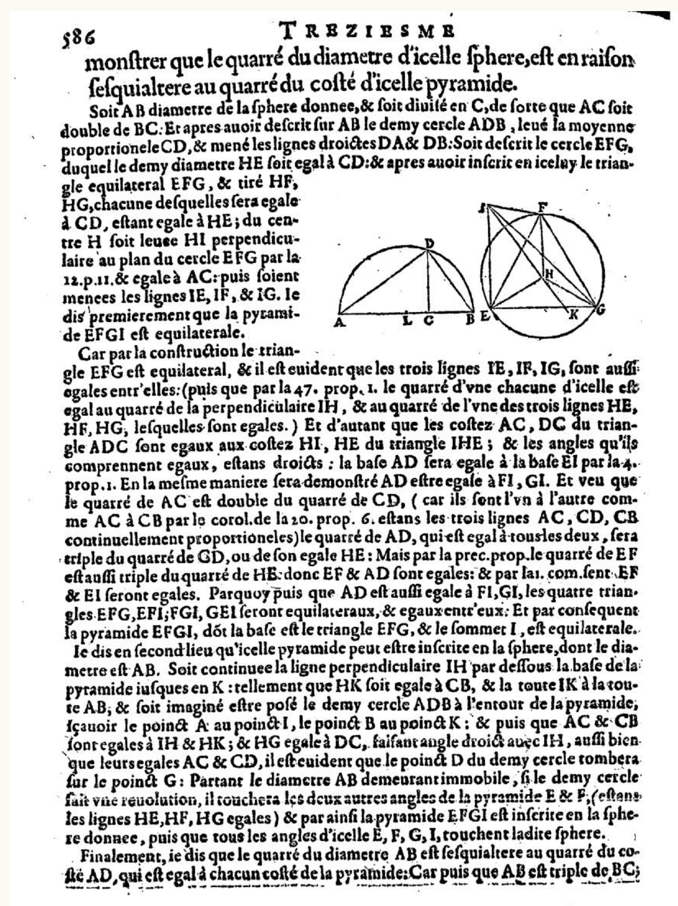
Comme ſi la droite ligne E F, tombant ſur les droites lignes A B & C D, les coppant aux poincts G & H, fait les deux angles interieurs B G H & D H G, pris enſemble, moindres que deux droits: leſdites droites lignes A B & C D ſe joindrõt du coſté des deux poincts B & D. car ſi nous mettons B G perpendiculaire à E F, les angles qui ſont à G ſont droits. Soit dõc D H G moindre qu'vn droit: D H panchera ſur E F du coſté de E. Donques l'angle D H G moindre que l'angle D H F, par la conuerſion de la dixieme definition, & partant moindre qu'vn droit, car s'il eſtoit egal, ils ſeroyent tous deux droits, par la meſme definition. Mais nous poſons icy le contraire. Donques, à cauſe du panchement ou inclination, C D prolongee en fin ſe joindra à A B : & ce d'autant que les deux angles B G H & D H G, ſont moindres que deux droits.

Mais ceſte petition ſe pouuoit mettre entre les definitions : car elle expoſe que c'eſt que ligne non parallele, comme la dixieme definition definit les paralleles. Elle eſtoit couchee en termes de Theoreme, nous l'auons reduite en petition.

Traduction du cinquième postulat par Peletier du Mans, 1578

LIVRE V

Théorie des proportions appliquée aux grandeurs commensurables et incommensurables.



586 TREZIESME

monſtrer que le quarré du diametre d'icelle ſphere, eſt en raiſon ſeſquialtere au quarré du coſté d'icelle pyramide.

Soit A B diametre de la ſphere donnee, & ſoit diuiſé en C, de ſorte que AC ſoit double de BC. Et apres auoir deſcrit ſur AB le demy cercle ADB, leué la moyenne proportionele CD, & mené les lignes droictes DA & DB: Soit deſcrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE ſoit egal à CD: & apres auoir inſcrit en iceluy le triangle equilateral EFG, & tiré HF, HG, chacune deſquelles ſera egale à CD, eſtant egale à HE; du centre H ſoit leuee HI perpendiculaire au plan du cercle EFG par la 12.p.11. & egale à AC: puis ſoient menees les lignes IE, IF, & IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI eſt equilaterale.

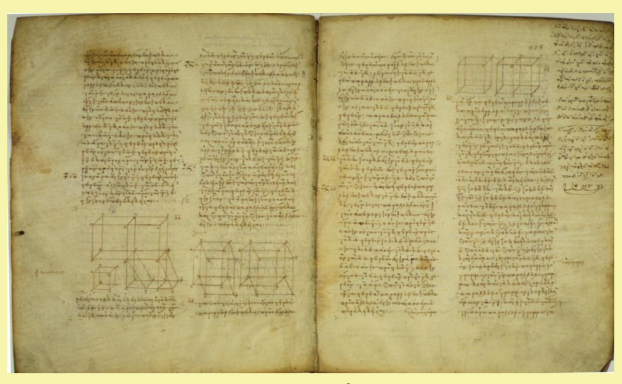
Car par la conſtruction le triangle EFG eſt equilateral, & il eſt euident que les trois lignes IE, IF, IG, ſont auſſi egales entr'elles: (puis que par la 47. prop. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle eſt egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, leſquelles ſont egales.) Et d'autant que les coſtez AC, DC du triangle ADC ſont egaux aux coſtez HI, HE du triangle IHE; & les angles qu'ils comprennent egaux, eſtans droicts : la baſe AD ſera egale à la baſe EI par la 4. prop. 1. En la meſme maniere ſera demonſtré AD eſtre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC eſt double du quarré de CD, (car ils ſont l'vn à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. prop. 6. eſtans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de CD, ou de ſon egale HE : Mais par la prec. prop. le quarré de EF eſt auſſi triple du quarré de HE: donc EF & AD ſont egales: & par la 1. com. ſent. EF & EI ſeront egales. Parquoy puis que AD eſt auſſi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI ſeront equilateraux, & egaux entr'eux: Et par conſequent la pyramide EFGI, dõt la baſe eſt le triangle EFG, & le ſommet I, eſt equilaterale.

Ie dis en ſecond lieu qu'icelle pyramide peut eſtre inſcrite en la ſphere, dont le diametre eſt AB. Soit continuee la ligne perpendiculaire IH par deſſous la baſe de la pyramide iuſques en K : tellement que HK ſoit egale à CB, & la toute IK à la toute AB, & ſoit imaginé eſtre poſé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, ſçauoir le poinct A au poinct I, le poinct B au poinct K : & puis que AC & CB ſont egales à IH & HK ; & HG egale à DC, faiſant angle droict auec IH, auſſi bien que leurs egales AC & CD, il eſt euident que le poinct D du demy cercle tombera ſur le poinct G : Partant le diametre AB demeurant immobile, ſi le demy cercle fait vne reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (eſtans les lignes HE, HF, HG egales) & par ainſi la pyramide EFGI eſt inſcrite en la ſphere donnee, puis que tous les angles d'icelle E, F, G, I, touchent ladite ſphere.

Finalement, ie dis que le quarré du diametre AB eſt ſeſquialtere au quarré du coſté AD, qui eſt egal à chacun coſté de la pyramide: Car puis que AB eſt triple de BC;

Prop XIII-13, trad. D. Henrion, Paris 1632, Source Gallica.bnf.fr

STÉRÉOMÉTRIE



Prop. XI-31, Codex Vaticanus

LIVRE XI

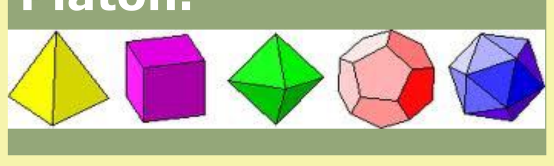
Étude des propriétés des solides élémentaires.

LIVRE XII

Résultats sur la mesure du cercle, de la sphère, du cône et de la pyramide.

LIVRE XIII

Étude et construction des cinq polyèdres réguliers dits de Platon.



LIVRE X

Problèmes de commensurabilité et d'incommensurabilité Démonstration géométrique de relations telles que :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

ARITHMÉTIQUE

LIVRE VII

Un algorithme de calcul du PGCD et son utilisation pour démontrer que deux entiers sont premiers entre eux.

LIVRE VIII

Étude des progressions géométriques.

LIVRE IX

Démonstration par l'absurde de l'existence d' une infinité de nombres premiers. Ébauche de la démonstration de la décomposition unique d'un entier en produit de facteurs premiers.

Portrait d'Euclide Juste de Gand (XVe s.)

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013