COMPASS AND STRAIGHTEDGE CONSTRUCTIONS

REPRESENTING

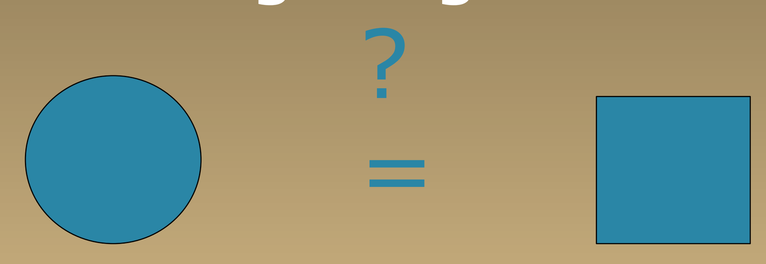
THE THREE GREAT PROBLEMS OF GREEK ANTIQUITY

From ancient Greece to the 19th century, these problems have fascinated mathematicians.

Codex Vindobonensis 2554 (vers 1250), Österreichische Nationalbibliothek.

The Quadrature of Circle :

Construct an area equal to that of a given circle with a straightedge and compass.



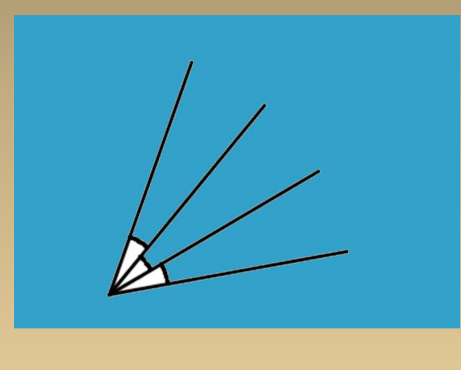
The problem amount to calculate : π

The quadrature of the circle seemed possible to the Greeks while they were searching for a fraction equal to the ratio of the circumference to the diameter. Their results were only good approximations to π.

This is one of the problems that will lead to the emergence of the notion of irrational numbers.

Trisecting an angle :

Divide a given angle into three parts with a straight-edge and compass



Why just straightedge and compass?

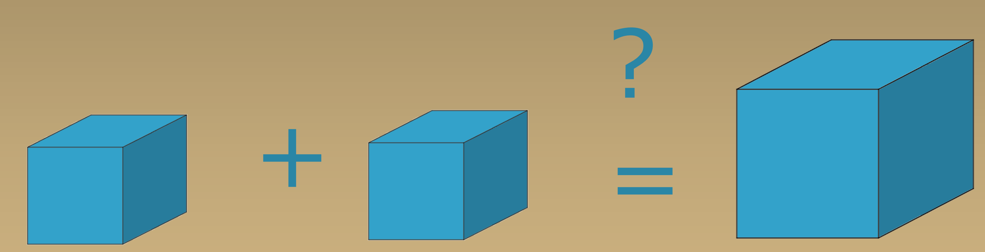
Greek geometers chose the simplest objects in view of the formalization of geometry: the straight line and the circle (the most perfect shape, according to Proclus) They sought geometric constructions obtained by intersections of lines and circles without using the notion of measure.
The first two assertions Euclid postulates in the book I of The Elements (the foundation of mathematics), are the possibility of drawing a straight line from one point to another, and of drawing a circle of given center and radius.

Can geometry save the inhabitants of Delos from the plague?

In order to eradicate an epidemic of the plague, the Delphic oracle demands doubling the altar consecrated to Apollo, which is in the form of a perfect cube.

Doubling a cube:

Construct a cube with twice the volume of given cube, using a straightedge and compass.



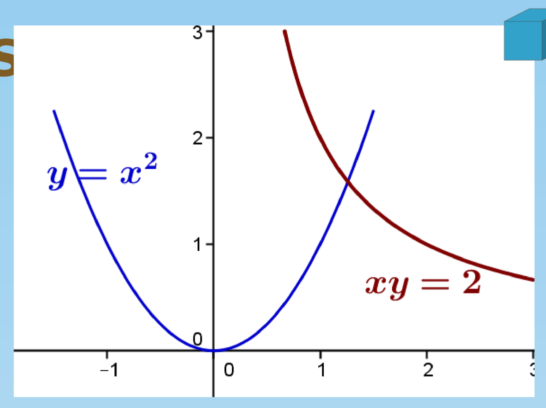
The problem amount to constructing $\sqrt[3]{2}$

This problem leads to the solution of third degree equations by Cardan at the start of the 16th century.

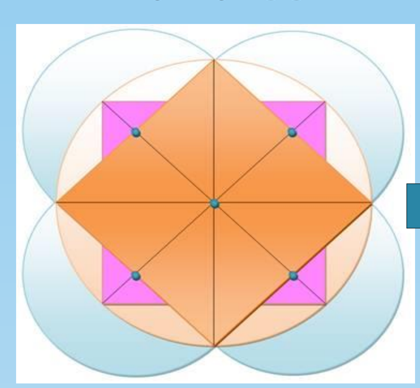
And if we try with other tools?

CURVES

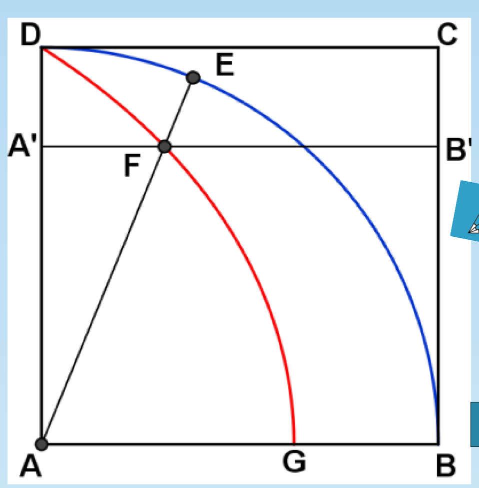
MENAECHMUS
Conics

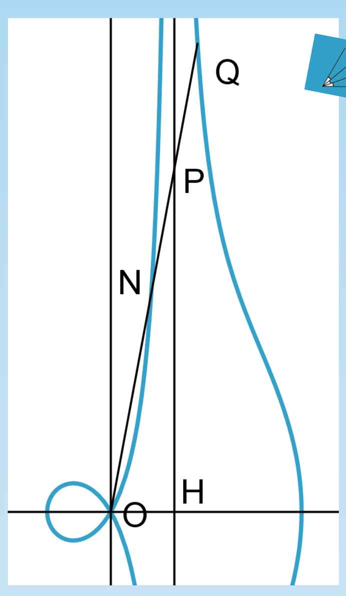


HIPPOCRATES of CHIOS
Lunules



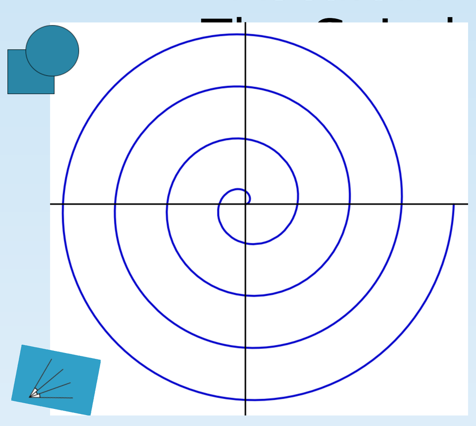
HIPPIAS of ELIS
The Quadratrix of Dinostratus



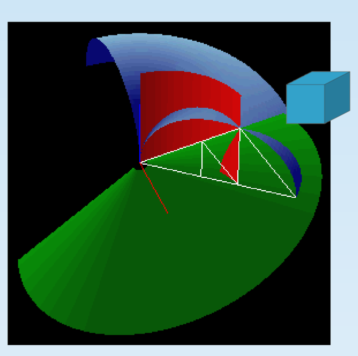


NICOMEDES
The Conchoid

ARCHIMEDES et Eutocius of Ascalon



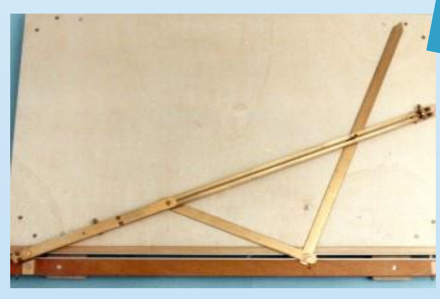
ARCHYTAS de TARENTUM
A solution in 3D



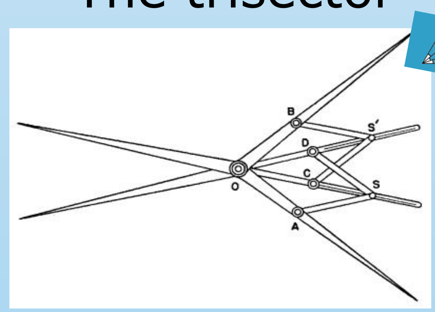
INSTRUMENTS

ERATHOSTENES
The Mesolabe

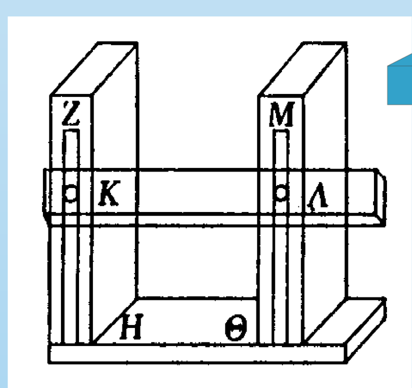
ARCHIMEDES
The ruler with two markings



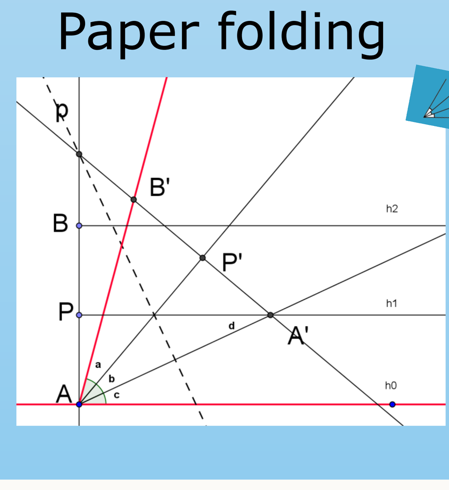
LAISANT
The trisector

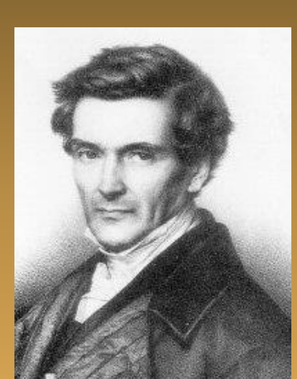


PLATO'S
Machine

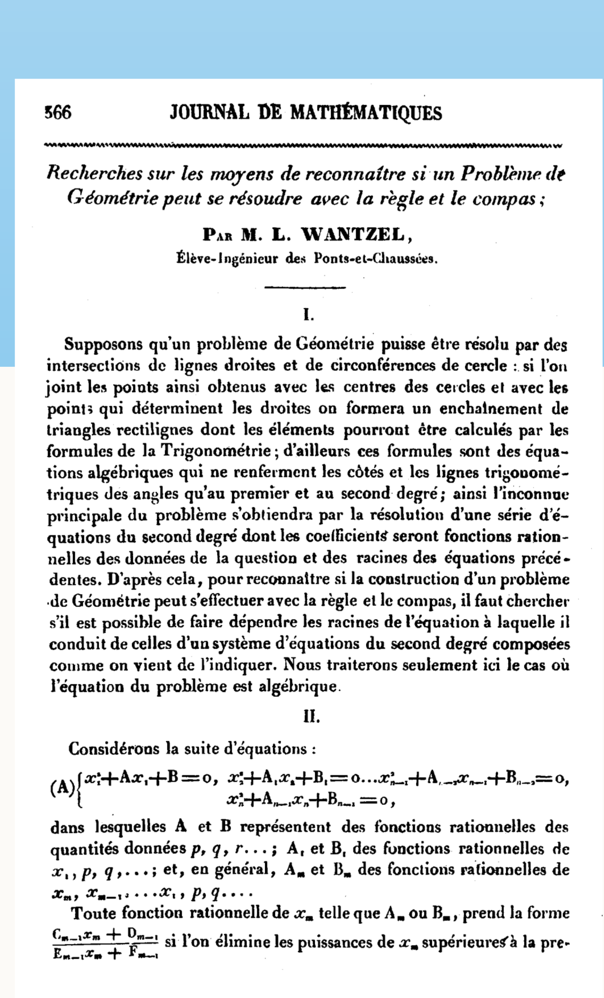


ABE, 1980
Paper folding





In 1837 Pierre-Laurent WANTZEL demonstrated that these three problems are not constructible with just a straightedge and compass. Moreover, Ferdinand von LINDEMANN showed the transcendence π of in 1882.



566 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

I.

Supposons qu'un problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie ; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré ; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici le cas où l'équation du problème est algébrique.

II.

Considérons la suite d'équations :

$$(A)\begin{cases} x_1^2+Ax_1+B=0,\ x_2^2+A_1x_2+B_1=0\ldots x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0,\\ x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0,\end{cases}$$

dans lesquelles A et B représentent des fonctions rationnelles des quantités données $p, q, r\ldots$; A_1 et B_1 des fonctions rationnelles de $x_1, p, q, \ldots$; et, en général, A_m et B_m des fonctions rationnelles de $x_m, x_{m-1}, \ldots x_1, p, q\ldots$.

Toute fonction rationnelle de x_m telle que A_m ou B_m, prend la forme $\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$ si l'on élimine les puissances de x_m supérieures à la pre-

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013